УДК 519.246

УМОВНИЙ ЦИКЛІЧНИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВНИХ СИГНАЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ ІЗ ПОДВІЙНОЮ СТОХАСТИЧНІСТЮ

С. А. Лупенко[1], А. С. Сверстюк[2], Н. С. Луцик[1], Н. Б. Стадник[1], А. М. Зозуля[1]

[1]Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46001, Україна

[2]Тернопільський державний медичний університет імені Івана Горбачевського, вул. Руська 12, Тернопіль, 46001, Україна

Створено нову математичну модель сигналів та процесів коливної структури у вигляді умовного циклічного випадкового процесу, яка, на відміну від відомих моделей, дає змогу враховувати їх подвійну стохастичність, а саме: стохастичність морфологічної та ритмічної структур циклічних сигналів. Ця модель усуває суперечність між відомими моделями циклічних випадкових процесів та стохастичними моделями їх ритму, а також суттєво розширює засоби моделювання та аналізу ритмічної структури коливних процесів у рамках стохастичного підходу, надаючи додаткові можливості для підвищення точності та інформативності опрацювання циклічних сигналів різної фізичної природи та структури.

Ключові слова: *математична модель, циклічний сигнал, випадковий процес, функція ритму.*

Постановка проблеми. Коливні, циклічні явища та процеси займають важливе місце серед явищ та процесів дійсності, а розроблення сучасних інформаційних систем та технологій опрацювання та імітації циклічних сигналів різної природи дає змогу автоматизувати та суттєво інтенсифікувати процедуру їх аналізу, діагностики та прогнозу стану систем, у яких вони відбуваються, відкриває можливість проведення комп'ютерних імітаційних експериментів. Типовими прикладами таких систем є комп'ютерні системи кардіодіагностики, інформаційні системи аналізу та прогнозування циклічних економічних процесів, інформаційні системи аутентифікації особи за її біометричними динамічними даними, автоматизовані системи аналізу та прогнозу електро-, газо-, водо-, нафтоспоживання, програмно-апаратні засоби генерування та імітації циклічних сигналів.

Важливим етапом побудови інформаційних систем опрацювання та імітації циклічних сигналів є створення математичних моделей цих сигналів, які б адекватно відображали важливі з погляду задач дослідження аспекти їх просторово-часової структури. Математичним моделям циклічних явищ та сигналів присвячено чимало наукових праць. Однак, незважаючи на давню історію та досягнутий поважний розвиток математичного моделювання циклічних процесів та сигналів, варто констатувати, що відомі математичні моделі циклічних сигналів і процесів не мають засобів одночасного врахування подвійної стохастичності їх ритму та морфологічної структури, що призводить до логічної суперечності та обмеженості наявних методів аналізу та прогнозування ритму таких процесів у рамках стохастичного підходу. Прикладом процесів і сигналів із подвійною стохастичністю може бути широкий клас кардіосигналів електричної, магнітної та механічної природи, економічні циклічні процеси, процеси появи плям на Сонці, серії динамічних підписів особи, процеси самоорганізації (процеси розтріскування нанопокриття) на поверхні матеріалів та ін. Зокрема, у сучасних комп'ютерних системах кардіометрії аналіз кардіосигналів умовно поділяють на два види, а саме: аналіз серцевого ритму та морфологічний аналіз (морфоаналіз). Не зважаючи на те, що первинними даними для цих двох видів аналізу є ті самі зареєстровані кардіограми (кардіореєстрограми), морфологічний аналіз та аналіз серцевого ритму кардіосигналів здійснюється на базі різних, а інколи і суперечливих їх математичних моделей. Такий стан справ насамперед зумовлений складністю часової структури кардіосигналів, оскільки для них характерна циклічність і стохастичність їх морфологічної структури, а також мінливість (варіабельність) та стохастичність їх ритмічної структури. Відомі математичні моделі кардіосигналів не враховують стохастичність ритму сигналів серця, що не дає змоги узгодити між собою методи статистичного аналізу їх морфологічної та ритмічної структур, оскільки більшість сучасних кардіодіагностичних інформаційних систем здійснюють аналіз серцевого ритму в рамках стохастичного підходу. Крім того, згідно із математичною моделлю кардіосигналів у вигляді циклічного випадкового процесу, за умови ергодичності вкладених у нього стаціонарних та стаціонарно пов'язаних випадкових послідовностей, статистичне оцінювання за ансамблем реалізацій кардіосигналу того самого пацієнта та статистичне оцінювання ймовірнісних характеристик кардіосигналу, що виконується синфазним методом, повинні давати близькі (теоретично ідентичні) результати. Однак цього ефекту не спостерігається, оскільки через випадкову мінливість ритму від реалізації до реалізації кардіосигналу ансамбль реалізацій не є статистично однорідним та засинхронізованим, що призводить до розмивання статистичних характеристик. Аналогічні проблеми характерні і для задач моделювання, аналізу та прогнозування ряду інших циклічних процесів.

Отже, є проблема узгодження методів морфологічного аналізу циклічних сигналів, що базуються на моделі циклічного випадкового процесу, яка враховує зміну ритму досліджуваного сигналу у рамках детермінованого підходу та методи аналізу його ритму, що ґрунтуються на стохастичних моделях ритму циклічного сигналу. Для розв'язання цієї проблеми, а саме — для усунення суперечності між моделями циклічних сигналів, варто скористатися діалектичним методом, що базується на законі діалектики: «тезис – антитезис – синтез», тобто треба розробити узагальнену математичну модель циклічних сигналів із подвійною стохастичністю, яка б поряд із циклічністю та стохастичністю їх морфологічної структури, мінливістю їх ритму, враховувала б стохастичний характер зміни ритму. Крім того, потрібно вимагати, щоб ця модель узгоджувалася із відомими моделями циклічних сигналів та давала б змогу підвищити точність та інформативність методів аналізу їх ритму в комп'ютерних системах діагностування та прогнозування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У рамках детермінованого підходу до математичного моделювання та опрацювання циклічних сигналів вагомі результати досягнуті у працях таких відомих учених, як Безикович А.С., Бор Н., Бол Г. М., Вінер Н., Гоноровський І. С., Діріхле Й, Фур'є Ш. (моделювання структури циклічних сигналів у рамках періодичної, майже періодичної, квазігармонічної функцій, квазімеандру та застосування методів спектрального аналізу) та Андронов В. І., Боголюбов М., Крилов М. М., Ляпунов О. А., Мандельштам Л. І., Пуанкаре А. (моделювання механізмів формування циклічних сигналів із використанням теорії диференціальних рівнянь). Серед провідних науковців, які досліджували математичне моделювання та аналізували циклічні сигнали у рамках теоретико-ймовірнісного підходу, варто назвати Колмогорова А. М., Слуцького Є. Є., Хінчина О. (у рамках спектрально-кореляційної теорії стаціонарних випадкових процесів), Ґарда Ґаррі Л., Ґарднера В., Калліанпура Г., Войчишина К. С., Гладишева Е. Г., Драгана Я. П., Коренкевича О. І., Сікору Л., Стратоновича Р. Л, Яворського І. Н., Яворського Б. (у рамках теорії періодично-корельованих (циклостаціонарно корельованих) та майже періодично-корельованих (майже циклостаціонарно корельованих) випадкових процесів), Боме О., Гансена Л. П., Гайселса Р., Кохела П., Нематоллахі А. Р., Солтані А. Р., Тсе Р. С., Дороговцева А. Я. (у рамках теорії періодичних марковських випадкових процесів та ланцюгів), Драгана Я. П., Красильникова О. І., Марченка Б. Г., Приймака М. В., Щербака Л. М. (у рамках теорії лінійних періодичних випадкових процесів, процесів із незалежними періодичними приростами та періодичних білих шумів). У працях [1–3], означивши циклічний випадковий процес та вектор циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, зокрема циклічні білі шуми, процеси із незалежними циклічними приростами, циклічні марковські випадкові процеси, узагальнено відомі ймовірнісні моделі сигналів із періодичними ймовірнісними характеристиками, що удосконалило математичні засоби моделювання циклічних сигналів зі змінним та спільним ритмом у рамках теоретико-ймовірнісного підходу. Циклічний випадковий процес ефективно застосовується для моделювання циклічних сигналів серця, економічних циклічних процесів та поверхневих процесів у матеріалознавстві [4–9].

Мета статті — розроблення нової математичної моделі циклічних сигналів та процесів, яка має засоби опису їх подвійної стохастичності, а саме — враховує у своїй структурі стохастичність ритму циклічних сигналів та стохастичність їх морфологічної структури.

Виклад основного матеріалу дослідження. Будемо дотримуватися такої послідовності процедури побудови нової математичної моделі циклічних сигналів із подвійною стохастичністю: 1) сформулюємо вимоги до нової моделі, зокрема вкажемо, які властивості досліджуваних сигналів ця модель повинна враховувати і яким чином узгоджуватися із відомими моделями циклічних сигналів; 2) здійснимо побудову нової моделі із використанням попередніх напрацювань у галузі моделювання циклічних сигналів; 3) проаналізуємо розроблену у цій роботі математичну модель та її можливості стосовно розв'язання задач моделювання та опрацювання циклічних сигналів.

Вимоги до математичної моделі циклічних сигналів і процесів із подвійною стохастичністю. З метою формулювання вимог до нової математичної моделі циклічних сигналів із подвійною стохастичністю розглянемо типові приклади циклічних процесів та сигналів, для яких характерна подвійна стохастичність, а саме — циклічні сигнали серця. Так, при кожній реєстрації кардіосигналу отримується його реалізація, яка містить скінченну множину кардіоциклів. У різних експериментах (вимірюваннях) над одним пацієнтом в однакових умовах отримують різні реалізації кардіосигналу, за якими оцінюють його морфологічні ймовірнісні характеристики та характеристики ритму кардіосигналу, згідно з його моделлю у вигляді циклічного випадкового процесу. Незважаючи на свої відмінності, вони повинні характеризувати, подавати еквівалентну інформацію про ритм серця. А морфологічний аналіз має давати близькі результати статистичного оцінювання для різних реалізацій кардіосигналу від того самого пацієнта.

Беручи до уваги викладене, сформулюємо вимоги до нової моделі циклічних процесів із стохастичністю ритму та морфологічної структури, а саме — модель повинна враховувати:

1. Циклічну повторюваність структури досліджуваних сигналів.
2. Стохастичність морфологічної структури досліджуваних сигналів, що полягає у випадковості однофазних (однаково розподілених) відліків циклічного сигналу в різних його циклах.
3. Часову мінливість, змінність ритму (темпу) коливання досліджуваного сигналу, що як свій частинний (граничний) випадок включає постійний ритм для періодичних сигналів.
4. Стохастичність (недетермінованість) зміни ритму циклічного процесу як випадкового процесу, що підпорядкований певним ймовірнісним закономірностям.
5. Нова модель як частинний свій випадок повинна охоплювати відомі моделі циклічних сигналів у вигляді циклічного та періодичного випадкових процесів.

Побудова нової математичної моделі циклічних сигналів із подвійною стохастичністю. Перейдемо до побудови математичної моделі циклічного процесу із подвійною стохастичністю. Насамперед за основу побудови нової моделі візьмемо циклічний випадковий процес, оскільки перші три вимоги до нової моделі вже враховані у ньому, а саме — циклічний випадковий процес враховує циклічність, змінність ритму та стохастичність морфологічної структури досліджуваних сигналів.

Основні відомості про циклічні випадкові процеси та оператор перетворення шкали. Детальніше зупинимося на відомостях, які стосуються циклічного випадкового процесу та його функції ритму, а також оператора перетворення шкали, що є зручним математичним засобом перетворення ритму циклічного процесу. Нагадаємо означення циклічного випадкового процесу згідно з працею [1].

Означення 1. Сепарабельний випадковий процес $\xi(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$ називається циклічним випадковим процесом неперервного аргументу, якщо існує така функція $T(t,n)$, яка задовольняє умови функції ритму, що скінченновимірні вектори ($\xi(\omega,t_1)$, $\xi(\omega,t_2)$,..., $\xi(\omega,t_k)$) і ($\xi(\omega,t_1+T(t_1,n))$, $\xi(\omega,t_2+T(t_2,n))$,..., $\xi(\omega,t_k+T(t_k,n))$, $n \in \mathbf{Z}$, де $\{t_1,t_2,...,t_k\}$ — множина сепарабельності процесу $\xi(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$, при всіх цілих $k \ge 1$ є стохастично еквівалентними у широкому розумінні.

Областю визначення циклічного випадкового процесу є впорядкована дискретна $\mathbf{W} = \mathbf{D} = \{t_{ml} \in \mathbf{R},\ m \in \mathbf{Z},\ l = \overline{1,L},\ L \ge 2\}$ множина або множина $\mathbf{W} = \mathbf{R}$ дійсних чисел. У разі дискретності області визначення $\mathbf{W} = \mathbf{D}$ для її елементів характерний такий тип лінійного упорядкування: $t_{m_1 l_1} < t_{m_2 l_2}$, якщо $m_2 > m_1$, або якщо $m_2 = m_1$, а $l_2 > l_1$, в інших випадках $t_{m_1 l_1} > t_{m_2 l_2}$ ($m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$, $l_1, l_2 \in \overline{1,L}$, $0 < t_{m,l+1} - t_{m,l} < \infty$).

Функція ритму $T(t,n)$, згідно з доведеною в праці [3] теоремою, задовольняє такі умови:

$$
\begin{aligned}
&\text{a) } T(t,n) > 0, \text{ якщо } n > 0 \ (T(t,1) < \infty);\\
&\text{b) } T(t,n) = 0, \text{ якщо } n = 0;\\
&\text{c) } T(t,n) < 0, \text{ якщо } n < 0,\ t \in \mathbf{W};
\end{aligned} \tag{1}
$$

для будь-яких $t_1 \in \mathbf{W}$ та $t_2 \in \mathbf{W}$, для яких $t_1 < t_2$, для функції $T(t,n)$ виконується строга нерівність:

$$
T(t_1,n) + t_1 < T(t_2,n) + t_2,\ \forall n \in \mathbf{Z}; \tag{2}
$$

функція $T(t,n)$ є найменшою за модулем ($|T(t,n)| \le |T_\gamma(t,n)|$) серед усіх таких функцій $\{T_\gamma(t,n), \gamma \in \mathbf{\Gamma}\}$, які задовольняють (1) та (2).

Для циклічного випадкового процесу неперервного аргументу сімейство його функцій розподілу задовольняє таку рівність:

$$
\begin{gathered}
F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k) = F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1+T(t_1,n),...,t_k+T(t_k,n)),\\
x_1,...,x_k,t_1,...,t_k \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}
\end{gathered} \tag{3}
$$

тобто сімейство функцій розподілу циклічного випадкового процесу є інваріантним до біциклічної розривної зліченної групи перетворень $\mathbf{\Gamma} = \{T_n(t) = y(t,n), n \in \mathbf{Z}\}$ (стосовно операції суперпозиції цих перетворень), які задовольняють умовам (1) та (2).

Якщо $T(t,n) = n \cdot T, T = const > 0$, то отримується циклічний випадковий процес зі стабільним ритмом, або так званий стохастично Т-періодичний процес. Якщо $T(t,n) \ne n \cdot T$, то будемо мати циклічний випадковий процес зі змінним ритмом.

Важливу роль у масштабних перетвореннях циклічних випадкових процесів відіграє оператор перетворення шкали, дія якого зводиться до трансформації первинного циклічного процесу у циклічний випадковий процес, що ізоморфний первинному процесу відносно порядку та значень. Тому спочатку наведемо таке означення згідно з працею [10].

Означення 2. Циклічний випадковий процес $\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$ із функцією ритму $T_1(t,n)$ та циклічний випадковий процес $\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'$ із функцією ритму $T_2(t',n)$, будемо називати ізоморфними відносно порядку та значень, якщо мають місце наступні факти.

1. Ізоморфізм стосовно відношення порядку між упорядкованими множинами $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ (ізоморфізм між областями визначення циклічних випадкових процесів), а саме:

1. а) має місце бієкція між $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ ($\mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{W}'$), тобто будь-якому $t \in \mathbf{W}$ відповідає лише одне $t' \in \mathbf{W}'$ ($t \to t'$), а будь-якому $t' \in \mathbf{W}'$ ставиться у відповідність лише одне $t \in \mathbf{W}$ ($t' \to t$), причому для будь-яких різних $t_1, t_2 \in \mathbf{W}$ їх образи $t_1', t_2' \in \mathbf{W}'$ є різними, і навпаки;

1. б) зберігається тип лінійного упорядкування множин $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$, тобто $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{W}$, $\exists t_1', t_2' \in \mathbf{W}'$, що $t_1' \leftrightarrow t_1$, $t_2' \leftrightarrow t_2$ та виконується відношення порядку $t_2' > t_1'$, якщо $t_2 > t_1$, і навпаки.

2. Ізоморфізм відносно порядку циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$ та $\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'$, що зумовлено ізоморфізмом їх областей визначення, а саме:

2. а) внаслідок бієкції $\mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{W}'$ областей визначення відбувається бієкція між випадковими процесами $\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$ та $\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'$, тобто для будь-яких $t \in \mathbf{W}$ та $t' \in \mathbf{W}'$, що перебувають у бієктивній пов'язаності ($t \leftrightarrow t'$), відповідні їм пари $(t, \xi_1(\omega,t))$ і $(t', \xi_2(\omega,t'))$ циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$ та $\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'$ також перебувають у бієктивній пов'язаності $(t, \xi_1(\omega,t)) \leftrightarrow (t', \xi_2(\omega,t'))$;

2. б) внаслідок збіжності типів упорядкування областей визначення $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$, збігаються типи упорядкування самих циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$ та $\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'$, а саме: для будь-яких різних пар $(t_1, \xi_1(\omega,t_1))$ та $(t_2, \xi_1(\omega,t_2))$, що перебувають у бієктивній пов'язаності із парами $(t_1', \xi_2(\omega,t_1'))$ та $(t_2', \xi_2(\omega,t_2'))$ ($(t_1', \xi_2(\omega,t_1')) \leftrightarrow (t_1, \xi_1(\omega,t_1))$, $(t_2', \xi_2(\omega,t_2')) \leftrightarrow (t_2, \xi_1(\omega,t_2))$), характерні відношення порядку $(t_2', \xi_2(\omega,t_2')) > (t_1', \xi_2(\omega,t_1'))$ та $(t_2, \xi_1(\omega,t_2)) > (t_1, \xi_1(\omega,t_1))$, якщо $t_2' > t_1'$ та $t_2 > t_1$ ($t_1' \leftrightarrow t_1, t_2' \leftrightarrow t_2$).

3. З імовірністю одиниця значення циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$ та $\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'$, коли їх відповідні аргументи $t \in \mathbf{W}$ та $t' \in \mathbf{W}'$, а також $t + T_1(t,n)$ та $t' + T_2(t',n), n \in \mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t \leftrightarrow t'$, $t' + T_2(t',n) \leftrightarrow t + T_1(t,n), n \in \mathbf{Z}$), є рівними, а саме:

$$\begin{gathered} \mathbf{P}\left\{\xi_1(\omega,t) = \xi_2(\omega,t')\right\} = 1 \,, \\ \mathbf{P}\left\{\xi_1\left(\omega, t + T_1(t,n)\right) = \xi_2\left(\omega, t' + T_2(t',n)\right)\right\} = 1 \,, \\ t' \leftrightarrow t \,,\ t' + T_2(t',n) \leftrightarrow t + T_1(t,n),\ t \in \mathbf{W}, t' \in \mathbf{W}', n \in \mathbf{Z} \,. \end{gathered} \tag{4}$$

У роботі [10] показано, що ізоморфні відносно порядку та значень циклічні випадкові процеси відрізняються лише своїми шкалами та функціями ритму, а саме — між будь-якими двома випадковими процесами $\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}$ та $\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'$ із цього класу еквівалентності виконується рівність їх

(k-вимірних) функцій розподілу $F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k)$ та $F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t'_1,...,t'_k)$, коли відповідні набори аргументів $t_1,...,t_k$ та $t'_1,...,t'_k$, а також $t_i+T_1\left(t_i,n\right)$ та $t'_i+T_2\left(t'_i,n\right), i=\overline{1,k}, n\in\mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності, тобто справджуються такі співвідношення:

$$
\begin{gathered}
F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k)=F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1+T_1(t_1,n),...,t_k+T_1(t_k,n))= \\
=F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t'_1,...,t'_k)=F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t'_1+T_2(t'_1,n),...,t'_k+T_2(t'_k,n)), \\
x_1,...,x_k\in\mathbf{R}, t_1,...,t_k, t'_1,...,t'_k\in\mathbf{R}, \\
t'_i\leftrightarrow t_i, t'_i+T_2\left(t'_i,n\right)\leftrightarrow t_i+T_1\left(t_i,n\right), i=\overline{1,k}, n\in\mathbf{Z}, k\in\mathbf{N}.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Для потреб статистичного, спектрального аналізу та імітаційного моделювання циклічних сигналів як засіб управління їх ритмом ефективно використовується оператор перетворення шкали $\mathbf{G}_{y(t)}\left[\left\{\xi_1(\omega,t), t\in\mathbf{R}\right\}\right]=\left\{\xi_2(\omega,t'), t'\in\mathbf{R}\right\}$, який діє на циклічний випадковий процес $\xi_1\left(\omega,t\right), t\in\mathbf{R}$ і перетворює його на ізоморфний йому відносно порядку та значень новий циклічний випадковий процес (складну випадкову функцію) $\xi_2\left(\omega,t'\right), t'\in\mathbf{R}$ із проміжним аргументом $t'=y\left(t\right)\in\mathbf{R}$, яким є зростаюча числова функція ($y\left(t_2\right)=t'_2>t'_1=y\left(t_1\right)$, якщо $t_2>t_1$, $t_1,t_2\in\mathbf{R}$), причому має місце така система рівнянь:

$$
\begin{cases}
t'=y\left(t\right), \\
\xi_2\left(\omega,t'\right)=\xi_1\left(\omega,t\right), t,t'\in\mathbf{R}.
\end{cases} \tag{6}
$$

Функцію $y\left(t\right)$ названо функцією перетворення шкали.

У праці [10] встановлено співвідношення між функціями ритму $T_1\left(t,n\right)$ та $T_2\left(t',n\right)$ ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів $\xi_1\left(\omega,t\right), t\in\mathbf{R}$ та $\xi_2\left(\omega,t'\right), t'\in\mathbf{R}$, які пов'язані через оператор перетворення шкали $\mathbf{G}_{y(t)}\left[\cdot\right]$ та, відповідно, обернений до нього оператор $\mathbf{G}_{y^{-1}(t)}\left[\cdot\right]$:

$$
T_2\left(y\left(t\right),n\right)=y\left(t+T_1\left(t,n\right)\right)-y\left(t\right), t\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{Z}, \tag{7}
$$

$$
T_1\left(y^{-1}\left(t'\right),n\right)=y^{-1}\left(t'+T_2\left(t',n\right)\right)-y^{-1}\left(t'\right), t'\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{Z}. \tag{8}
$$

Встановлено таку аналітичну залежність між функціями розподілу ізоморфних відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень, які пов'язані через оператор перетворення шкали:

$$
\begin{gathered}
F_{k_{\xi_2}}\left(x_1,...,x_k, y\left(t_1\right)+T_2(y\left(t_1\right),n),...,y\left(t_k\right)+T_2(y\left(t_k\right),n)\right)= \\
=F_{k_{\xi_1}}\left(x_1,...,x_k,t_1+T_1(t_1,n),...,t_k+T_1(t_k,n)\right), \\
x_1,...,x_k\in\mathbf{R}, t_1,...,t_k\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}, k\in\mathbf{N}
\end{gathered} \tag{9}
$$

Отримані результати дають змогу здійснювати аналітичне та статистичне дослідження ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу за допомогою аналізу ізоморфного йому відносно порядку та значень деякого іншого циклічного випадкового процесу, наприклад, стохастично періодичного процесу, якщо відомий оператор перетворення шкали одного процесу в інший.

Процедура побудови нової моделі циклічних сигналів із подвійною стохастичністю. Доповнимо та модифікуємо циклічний випадковий процес такими новими математичними елементами, які б давали змогу відобразити стохастичність зміни ритму циклічних сигналів у такий спосіб, щоб від більш загальної нової моделі можна було перейти до циклічного випадкового процесу як її частинного випадку, що задовольнить вимоги 4 та 5.

Як було зазначено, статистичний аналіз циклічного сигналу за його різними реєстрограмами, що є реалізаціями циклічних випадкових процесів із різними функціями ритму, повинен давати близькі результати, а саме — близькі, подібні статистичні оцінки ймовірнісних характеристик циклічного сигналу. Для забезпечення вимоги узгодженості результатів статистичного аналізу циклічного випадкового процесу за його різними реєстрограмами слушно ввести множину ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів, які задані на тому самому ймовірнісному просторі $\left(\mathbf{\Omega},\mathbf{F},\mathbf{P}\right)$ і утворюють клас еквівалентності $\mathbf{\Delta}_{\xi}=\left\{\xi_{\lambda}\left(\omega,t\right),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{\lambda},\lambda\in\mathbf{\Lambda}\right\}$, де $\lambda\in\mathbf{\Lambda}$ є параметр, що позначає конкретний випадковий процес із множини $\mathbf{\Delta}_{\xi}$.

Якщо деякий, загалом довільний, циклічний випадковий процес $\xi_{\lambda_0}\left(\omega,t\right)$ із функцією ритму $T_0(t,n)$, що належить класу $\mathbf{\Delta}_{\xi}$, взяти за основний, то будь-який інший із класу $\mathbf{\Delta}_{\xi}$ циклічний випадковий процес $\xi_{\lambda}\left(\omega,t\right)\in\mathbf{\Delta}_{\xi}$, який має функцією ритму $T_{\lambda}\left(t,n\right)$, може бути утворений із $\xi_{\lambda_0}\left(\omega,t\right)$ шляхом дії оператора перетворення шкали: $\xi_{\lambda}\left(\omega,t'\right)=\xi_{\lambda_0}\left(\omega,y_{\lambda}\left(t\right)\right)$. Причому між функцією ритму $T_{\lambda}\left(t,n\right)$ та функцією перетворення шкали $y_{\lambda}\left(t\right)$, згідно з формулою (7), виконується залежність:

$$T_{\lambda}\left(y_{\lambda}\left(t\right),n\right)=y_{\lambda}\left(t+T_0\left(t,n\right)\right)-y_{\lambda}\left(t\right),t\in\mathbf{W},n\in\mathbf{Z}. \tag{10}$$

Оскільки кожному значенню параметра $\lambda\in\mathbf{\Lambda}$ відповідає лише один циклічний випадковий процес $\xi_{\lambda}\left(\omega,t\right)\in\mathbf{\Delta}_{\xi}$, його функція ритму $T_{\lambda}\left(t,n\right)\in\mathbf{\Delta}_{T(t,n)}$ та функція перетворення шкали $y_{\lambda}\left(t\right)\in\mathbf{\Delta}_{y(t)}$, то відбувається бієкція між класом еквівалентності $\mathbf{\Delta}_{\xi}=\left\{\xi_{\lambda}\left(\omega,t\right),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{\lambda},\lambda\in\mathbf{\Lambda}\right\}$, множиною функцій ритму $\mathbf{\Delta}_{T(t,n)}=\left\{T_{\lambda}\left(t,n\right),t\in\mathbf{W}_{\lambda},n\in\mathbf{Z},\lambda\in\mathbf{\Lambda}\right\}$ та множиною функцій перетворення шкали $\mathbf{\Delta}_{y(t)}=\left\{y_{\lambda}\left(t\right)\in\mathbf{W}'_{\lambda},t\in\mathbf{W}_{\lambda},\lambda\in\mathbf{\Lambda}\right\}$. За таких взаємооднозначних відображень ($\mathbf{\Delta}_{\xi}\Leftrightarrow\mathbf{\Delta}_{T(t,n)}\Leftrightarrow\mathbf{\Delta}_{y(t)}$) бієктивно пов'язаними будуть ті елементи множин $\mathbf{\Delta}_{\xi}$, $\mathbf{\Delta}_{T(t,n)}$ та $\mathbf{\Delta}_{y(t)}$, які мають однаковий параметр λ, а саме: $\xi_{\lambda}\left(\omega,t\right)\leftrightarrow T_{\lambda}\left(t,n\right)\leftrightarrow y_{\lambda}\left(t\right)$.

Ці математичні об'єкти формально враховують той факт, що моделлю циклічного сигналу є циклічний випадковий процес, що обґрунтовано в попередніх працях [1–3], а також відображають той експериментальний факт, що оцінки функцій ритму циклічного сигналу за різними його реєстрограмами суттєво відрізняються, однак статистичні морфологічні характеристики самого сигналу за різними його реєстрограмами є близькими. Проте такий математичний опис необхідно доповнити новим ймовірнісним простором, множиною елементарних подій якого буде клас $\mathbf{\Delta}_{\xi}$, що уможливить опис ритму циклічного сигналу як випадкової функції ритму в рамках теорії випадкових процесів. Такий опис дасть змогу усунути суперечність між описами ритму та морфологічної структури в наявних моделях циклічних сигналів.

Розглянемо стохастичний експеримент, який описується деяким ймовірнісним простором $\left(\mathbf{\Omega}',\mathbf{F}',\mathbf{P}'\right)$, що є стохастично незалежним із $\left(\mathbf{\Omega},\mathbf{F},\mathbf{P}\right)$. Введемо випадкову величину $\lambda\left(\omega'\right)=\lambda, \omega' \in \mathbf{\Omega}', \lambda \in \mathbf{\Lambda}$ з областю визначення $\mathbf{\Omega}'$ та областю значень $\mathbf{\Lambda}$. У такому разі ω'-реалізацією випадкової величини $\lambda\left(\omega'\right)$ є параметр λ, який визначає відповідний йому циклічний випадковий процес $\xi_{\lambda}\left(\omega,t\right) \in \mathbf{\Delta}_{\xi}$ із функцією ритму $T_{\lambda}\left(t,n\right)$ та функцію перетворення шкали $y_{\lambda}\left(t\right)$. Враховуючи наведені вище міркування, природно вводяться ймовірнісні об'єкти, які задані на ймовірнісному просторі $\left(\mathbf{\Omega}',\mathbf{F}',\mathbf{P}'\right)$, а саме: випадковий процес $\left\{\xi\left(\omega',\omega,t\right)=\xi_{\lambda(\omega')}\left(\omega,t\right) \in \mathbf{\Delta}_{\xi}, \omega' \in \mathbf{\Omega}', \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}, \lambda \in \mathbf{\Lambda}\right\}$ із областю значень $\mathbf{\Delta}_{\xi}$, випадкова функція ритму $T\left(\omega',t,n\right)=T_{\lambda(\omega')}\left(t,n\right)$ із областю значень $\mathbf{\Delta}_{T(t,n)}$ та випадковий оператор перетворення шкали $\mathbf{G}_{y(\omega',t)}\left[\cdot\right]$ із випадковою функцією перетворення шкали $y\left(\omega',t\right)=y_{\lambda(\omega')}\left(t\right)$ із областю значень $\mathbf{\Delta}_{y(t)}$. Розглянемо властивості ймовірнісних характеристик цих випадкових об'єктів.

Умовна функція розподілу $F_{k_{\xi}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k \left| T(\omega',t,n)=T_{\lambda(\omega')}(t,n)\right.)$ є випадковим полем із циклічними за сукупністю аргументів $t_1,...,t_k$ реалізаціями, а тому можна записати таку рівність:

$$\begin{gathered} F_{k_{\xi}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k \left| T(\omega',t,n)=T_{\lambda(\omega')}(t,n)\right.)= \\ =F_{k_{\xi}}(x_1,...,x_k,t_1+T(\omega',t_1,n),...,t_k+T(\omega',t_k,n)\left| T(\omega',t,n)=T_{\lambda(\omega')}(t,n)\right.), \\ x_1,...,x_k \in \mathbf{R}, t_1,...,t_k \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}, \omega' \in \mathbf{\Omega}'. \end{gathered} \tag{11}$$

Реалізацією випадкового процесу $T\left(\omega',t,n\right)$ є функція $T_{\lambda(\omega')}\left(t,n\right)$, яка задовольняє умови функції ритму. Реалізацією умовної функції розподілу $F_{k_{\xi}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k \left| T(\omega',t,n)\right.)$ є звичайна (детермінована) умовна функція розподілу $F_{k_{\xi}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k \left| T_{\lambda(\omega')}\left(t,n\right)\right.)$, яка є циклічною за сукупністю часових аргументів $t_1,...,t_k$. Отже, для врахування стохастичності ритмічної та морфологічної структур циклічного сигналу, його необхідно описувати в термінах умовних функцій розподілу чи умовних моментних функцій (умовне математичне сподівання, умовна кореляційна функція), які є випадковими об'єктами. У цьому разі математичною моделлю циклічного сигналу є умовний циклічний випадковий процес, утворений із сукупності двох математичних об'єктів, а саме: класу еквівалентності $\mathbf{\Delta}_{\xi}$ ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів та випадкової функції ритму $T\left(\omega',t,n\right)$.

Оскільки ймовірнісні простори $\left(\mathbf{\Omega},\mathbf{F},\mathbf{P}\right)$ та $\left(\mathbf{\Omega}',\mathbf{F}',\mathbf{P}'\right)$ є стохастично незалежними, то ймовірнісні характеристики випадкової функції ритму $T\left(\omega',t,n\right)$ повністю визначаються простором $\left(\mathbf{\Omega}',\mathbf{F}',\mathbf{P}'\right)$.

Відзначимо, що при введенні даних випадкових об'єктів, залишились без уточнення такі поняття, як алгебра (σ-алгебра) $\mathbf{F}'$, ймовірнісна міра $\mathbf{P}'$ та вигляд вимірного відображення $\lambda\left(\omega'\right)$. Конкретизація цих математичних об'єктів, а також встановлення залежностей між ймовірнісними характеристиками випадкової величини $\lambda\left(\omega'\right)$ та випадкових процесів $\xi\left(\omega',\omega,t\right)$, $T\left(\omega',t,n\right)$, $y\left(\omega',t\right)$ не є метою цієї роботи і може бути здійснена при побудові конкретних математичних моделей циклічних сигналів із подвійною стохастичністю.

Аналіз розробленої у цій роботі математичної моделі та її можливостей стосовно розв'язання задач моделювання та опрацювання циклічних сигналів. У рамках розробленої математичної моделі кожну багатоциклову реєстрограму циклічного сигналу будемо трактувати як реалізацію одного із циклічних випадкових процесів, що належить класу еквівалентності $\mathbf{\Delta}_{\xi} = \left\{ \xi_{\lambda}\left(\omega, t\right), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}_{\lambda}, \lambda \in \mathbf{\Lambda} \right\}$. Оскільки всі елементи цього класу є еквівалентними випадковими процесами, це дає змогу формально врахувати експериментальний факт близькості, подібності відповідних статистичних оцінок ймовірнісних характеристик циклічного сигналу, що отримані за різними його реалізаціями, а оскільки самі елементи класу еквівалентності $\mathbf{\Delta}_{\xi}$ як циклічні випадкові процеси мають різні функції ритму, які можна трактувати як реалізації деякої випадкової функції $T\left(\omega', t, n\right)$ ритму самого циклічного сигналу.

Частинним випадком запропонованого підходу до моделювання кардіосигналів є модель, що поєднує стохастичну періодичність морфологічної структури циклічного сигналу та стохастичність його ритму. У цьому разі $\mathbf{\Delta}_{\xi}$ — це клас еквівалентності ізоморфних відносно порядку та значень періодичних випадкових процесів, а випадкова функція ритму $T\left(\omega', t, n\right) = n \cdot T\left(\omega'\right)$ зводиться до випадкової величини, яка набирає своїх значень із множини можливих періодів, а саме — із відрізку $\left[T_{\min}, T_{\max}\right]$.

Для проведення морфологічного аналізу циклічних сигналів достатньо скористатися його моделлю у вигляді циклічного випадкового процесу, де функція ритму є детермінованою і може бути будь-якою функцією із множини $\mathbf{\Delta}_{T(t,n)}$ можливих функцій, які задовольняють умовам функції ритму. Для аналізу ритму треба проводити моделювання та аналіз випадкової функції ритму $T\left(\omega', t, n\right)$.

Випадкова функція ритму циклічного сигналу, на відміну від відомих моделей ритму, має набагато більше переваг щодо точності та інформативності аналізу ритму, оскільки за таких умов є можливість постійного зростання «роздільної здатності», інформативності аналізу ритму. Зокрема, використання випадкової функції ритму для аналізу серцевого ритму дає змогу врахувати значно повніше інформацію про його часову структуру, що є підставою для підвищення точності діагностики серцевого ритму, оскільки здійснюється статистичний аналіз не лише R-R-інтервалів, що задають тривалість серцевих циклів, а шляхом виявлення статистичних закономірностей для більшої кількості часових інтервалів, що розділяють однофазні відліки електрокардіограми. Наприклад, такими однофазними відліками електрокардіограми можуть бути початки P-зубців, Q-зубців, R-зубців, S-зубців, T-зубців, U-зубців.

Висновки. Створено нову математичну модель широкого класу циклічних сигналів у вигляді умовного циклічного випадкового процесу, яка враховує їх циклічність, стохастичність морфологічної та ритмічної структур, що уможливило усунення суперечності між існуючими моделями циклічних сигналів та стохастичними моделями їх ритму, а також дало змогу узгодити методи морфологічного аналізу та методи аналізу ритму циклічних сигналів.

Обґрунтовано нову математичну модель ритму циклічних сигналів у вигляді випадкової функції ритму умовного циклічного випадкового процесу, що забезпечило можливість підвищення інформативності аналізу ритму в автоматизованих інформаційних системах завдяки повнішому та детальнішому опису ритму, що як частинний свій випадок включає відомі підходи до його моделювання та аналізу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лупенко С. Циклічні функції та їх класифікація в задачах моделювання циклічних сигналів та коливних систем / С. Лупенко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — Хмельницький : Навчальна книга, 2005. — № 1. — С. 177–185.
2. Лупенко С. Детермнированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация / С. Лупенко // Электронное моделирование. — 2006. — Т. 28, № 4. — С.47–65.
3. Лупенко С. Циклічне функціональне відношення як основа математичного формалізму теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — Тернопіль, 2007. — Т. 12, № 3. — С. 183–195.
4. Лупенко С. Математичне моделювання сигналів серця в задачах технічної кардіометрії на базі їх моделі у вигляді циклічного випадкового процесу / С. Лупенко, Ю. Студена // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2006. — Т. 11, № 1. — С.134–142.
5. Горкуненко А. Б. Математичне моделювання економічних циклічних процесів для їх автоматизованого аналізу та прогнозу / А. Б. Горкуненко, С. А. Лупенко, А. М. Луцків // Вісник Хмельницького національного університету. — Хмельницький, 2010. — № 3. — С. 269–275.
6. Литвиненко Я. В. Анализ множественного растрескивания нанопокрытия как циклического случайного процесса / Я. В. Литвиненко, С. А. Лупенко, П. О. Марущак // Автометрия. — 2013. — № 2. — С. 164–170.
7. Maruschak P. O. Influence of deformation process in material at multiple cracking and fragmentation of nanocoating // P. O. Maruschak, S. V. Panin, S. R. Ignatovich, I. M. Zakiev, I. V. Konovalenko, I. V. Lytvynenko, V. P. Sergeev // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2012. — Vol. 57. — P. 43–48.
8. Lytvynenko I. V. Processing and modeling of ordered relief at the surface of heat-resistant steels after laser irradiation as a cyclic random process / I. V. Lytvynenko, P. O. Maruschak, S. A. Lupenko // Automatic Control and Computer Sciences. — 2014. — Vol. 48 (1). — P. 1–9.
9. Lytvynenko I. Segmentation and Statistical Processing of Geometric and Spatial Data on Self-Organized Surface Relief of Statically Deformed Aluminum Alloy / I. Lytvynenko, P. Maruschak, S. Lupenko, S. Panin // Applied Mechanics & Materials. — 2015. — Vol. 770. — P. 288–293.
10. Лупенко С. Оператор перетворення шкали в задачах моделювання та аналізу циклічних сигналів / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — Тернопіль, 2007. — Т. 12, № 4. — С. 141–152.

REFERENCES

1. Lupenko, S. (2005). Tsyklichni funktsii ta yikh klasyfikatsiia v zadachakh modeliuvannia tsyklichnykh syhnaliv ta kolyvnykh system. Vymiriuvalna ta obchysliuvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh, 1 (p. 177–185). Khmelnitsky: Navchalna knyha (in Ukrainian).
2. Lupenko, S. (2006). Determnirovannye i sluchainye tciklicheskie funktcii kak modeli kolebatelnykh iavlenii i signalov: opredelenie i klassifikatciia. Elektronnoe modelirovanie, 28, 4 (in Russian).

3. Lupenko, S. (2007). Tsyklichne funktsionalne vidnoshennia yak osnova matematychnoho formalizmu teorii modeliuvannia ta analizu tsyklichnykh syhnaliv. Visnyk Ternopilskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu. — Vol. 12, 3, 183–195(in Ukrainian).
4. Lupenko, S., Studena, Iu. (2006). Matematychne modeliuvannia syhnaliv sertsia v zadachakh tekhnichnoi kardiometrii na bazi yikh modeli u vyhliadi tsyklichnoho vypadkovoho protsesu. VisnykTernopilskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu. Vol. 11, 1, 134–142 (in Ukrainian).
5. Horkunenko, A. B., Lupenko, S. A., & Lutskiv, A. M. (2010). Matematychne modeliuvannia ekonomichnykh tsyklichnykh protsesiv dlia yikh avtomatyzovanoho analizu ta prohnozu. Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu, 3 (in Ukrainian).
6. Litvinenko, Ia. V., Lupenko, S. A., & Marushchak, P. O. (2013). Analiz mnozhestvennogo rastreskivaniia nanopokrytiia kak tciklicheskogo sluchainogo protcessa. Avtometriia, 2 (in Russian).
7. Maruschak, P. O., Panin, S. V., Ignatovich, S. R., Zakiev, I. M., Konovalenko, & Lytvynenko, I. V. et. al. (2012). Influence of deformation process in material at multiple cracking and fragmentation of nanocoating. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 57 (in English).
8. Lytvynenkom, I. V., Maruschak, P. O., & Lupenko, S. A. (2014). Processing and modeling of ordered relief at the surface of heat-resistant steels after laser irradiation as a cyclic random process. Automatic Control and Computer Sciences, 48 (1) (in English).
9. Lytvynenko, I., Maruschak, P., Lupenko, S., & Panin, S. (2015). Segmentation and Statistical Processing of Geometric and Spatial Data on Self-Organized Surface Relief of Statically Deformed Aluminum Alloy. Applied Mechanics & Materials, 770 (in English).
10. Lupenko, S. (2007). Operator peretvorennia shkaly v zadachakh modeliuvannia ta analizu tsyklichnykh syhnaliv. Visnyk Ternopilskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu. Vol. 12, 4 (in Ukrainian).

CONDITIONAL CYCLIC RANDOM PROCESS AS MATHEMATICAL MODEL OF VIBRATIONAL SIGNALS AND PROCESSES WITH DOUBLE STOCHASTICITY

S. A. Lupenko[1], A. S. Sverstjuk[2], N. S. Lutsyk[1], N. B. Stadnyk[1], A. M. Zozulia[1]

[1]Ternopil Ivan Puluj National Technical University,
56, Ruska St., Ternopil, 46001, Ukraine,

[2]I. Horbachevsky Ternopil State Medical University,
12, Ruska St., Ternopil, 46001, Ukraine
lutsyk.nadiia@gmail.com

In this study the new mathematical model of the vibrational signals and processes in the form of conditional random process has been defined, which unlike their known models, make it possible to take into account their double stochasticity, that is, take into account stochasticity of the morphological and rhythmic structures of the cyclical signals *at the same time. This model eliminates the discrepancy between the model of cyclic random processes and the stochastic models of the rhythm and significantly expands simulation tools and analysis rhythmic structure of the vibrational processes within the framework the stochastic approach, providing additional features for increasing the accuracy and informativeness of processing of the different physical nature and structure cyclical signals*

Keywords: *mathematical model, cyclical signal, random process, rhythm function.*

Стаття надійшла до редакції 15.04.2016.
Received 15.04.2016.