УДК 513. 83

П. М. Пирч

Українська академія друкарства

МОРФІЗМИ ВІЛЬНИХ ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРІВ

Розглядається дія функтора вільного однорідного простору на неперервні відображення топологічних просторів.

Категорію вільних однорідних просторів було введено В. К. Бєльновим у роботі [2]. У працях [2–4] розглядалася дія функтора вільного однорідного простору на топологічні простори, у роботі [1] — на пари топологічних просторів. У роботі ми розглянемо дію цього функтора на неперервні відображення топологічних просторів.

Означення 1. Однорідним простором називається трійка (Y, G, h), де Y — топологічний простір, G — топологічна група, яка ефективно і транзитивно діє на просторі Y за допомогою неперервного відображення $h : G \times Y \to Y$.

Морфізмом однорідних просторів $p : (Y_1, G_1, h_1) \to (Y_2, G_2, h_2)$ називається така пара $p = (f, \psi)$, де $f : Y_1 \to Y_2$ — неперервне відображення, $\psi : G_1 \to G_2$ — неперервний гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times Y_1 & \xrightarrow{h_1} & Y_1 \\ \psi \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G_2 \times Y_2 & \xrightarrow{h_2} & Y_2 \end{array}$$

є комутативною.

Морфізм p називається ізоморфізмом, якщо існує такий морфізм $p_1 : (Y_2, G_2, h_2) \to (Y_1, G_1, h_1)$, що морфізми $p \circ p_1$ і $p_1 \circ p$ є тотожними.

Нехай (Y, G, h) — однорідний простір. Підмножина $Y_0 \subseteq Y$ породжує (Y, G, h), якщо кожен морфізм $p = (f, \psi) : (Y, G, h) \to (Y, G, h)$ для якого $f(Y_0) = Y_0$ й індуковане відображення $f_0 : Y_0 \to f(Y_0) = Y_0$ є тотожним.

Означення 2. Однорідний простір (Y, G, h) називається вільним однорідним простором свого підпростору X, якщо виконуються такі умови:

1. X породжує (Y, G, h);

2. Нехай (Y_1, G_1, h_1) — довільний однорідний простір і $f_0 : X \to Y_1$ — довільне неперервне відображення. Тоді існує такий морфізм $p = (f, \psi) : (Y, G, h) \to (Y_1, G_1, h_1)$, що $f|_X = f_0$.

Як було встановлено у [2–3] для кожного топологічного простору X існує і єдиний з точністю до ізоморфізму вільний однорідний простір $H(X)$.

Нехай $F(X)$ — вільна група з множиною твірних X, $G(X)$ — підгрупа групи $F(X)$ породжена множиною $\{xy^{-1} \in F(X) \mid x, y \in X\}$ і $H(X) = \{gx \in F(X) \mid g \in G, x \in X\}$. Нехай X — топологічний простір. Покладаючи $G(X)$ дискретним, розглянемо фактор відображення $f : G(X) \times X \to H(X)$

означене як $f((g, x)) = gx$. Множина $H(X)$ наділена фактортопологією, що індукується відображенням f буде вільним однорідним простором топологічного простору X [2]. У роботі [3] було встановлено, що кожен топологічний простір є образом свого вільного однорідного простору при відкритій ретракції.

Для неперервного відображення $f : X \to Y$ через $\overline{f} : H(X) \to H(Y)$ будемо позначати продовження відображення f до морфізму вільних однорідних просторів. Зазначимо, що морфізм $\overline{f}$ — це пара (f^*, ψ), де

$$f^*(x_1 x_2^{-1} x_3 \dots x_{2n}^{-1} x_{2n+1}) = f(x_1) f(x_2)^{-1} \dots f(x_{2n})^{-1} f(x_{2n+1}),$$

$$\psi(x_1 x_2^{-1} x_3 \dots x_{2n}^{-1}) = f(x_1) f(x_2)^{-1} \dots f(x_{2n})^{-1}, \text{ для всіх } x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1} \in X.$$

Для відображення $f : X \to Y$ розглянемо відображення $f : X \to Y$, за умови

$$f_1(x_1 x_2^{-1} x_3 \dots x_{2n}^{-1}, x) = (f(x_1) f(x_2)^{-1} \dots f(x_{2n})^{-1}, f(x)).$$

Теорема 1. *Неперервне відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів є факторним тільки у разі, якщо морфізм вільних однорідних просторів $f^* : H(X) \to H(Y)$, що його продовжує, є факторним.*

Д о в е д е н н я. Необхідність. Нехай $f : X \to Y$ — факторне відображення топологічних просторів. Тоді за наслідком 2.4.6 з [5] відображення $f_1 : G(X) \times X \to G(Y) \times Y$ буде також факторним. Позначимо через $h_X : G(X) \times X \to H(X)$ і $h_Y : G(Y) \times Y \to H(Y)$ відповідні факторні відображення. Тоді $h_Y \circ f_1 = f^* \circ h_X$. Відображення $h_Y \circ f_1$ є факторним як композиція двох факторних відображень. З факторності відображення $f^* \circ h_X$ випливає [5, наслідок 2.4.5] факторність відображення f^*.

Достатність. Припустимо, що відображення $f^* : H(X) \to H(Y)$ є факторним. Нехай $r_X : H(X) \to X$ і $r_Y : H(Y) \to Y$ — ретракції, побудовані в роботі [3]. Тоді $r_Y \circ f^* = f \circ r_X$. Оскільки, кожна ретракція є факторним відображенням, то відображення $r_Y \circ f^*$ і відповідно $f \circ r_X$ є факторними. Отже, за наслідком 2.4.5 з [5] відображення f буде факторним.

Безпосередньо з наслідку 2.4.6 з [5] випливає таке твердження.

Теорема 2. *Нехай (Y, G, h) — об'єкт категорії однорідних просторів, $f : X \to Y$ — факторне відображення з топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді морфізм $f^* : H(X) \to Y$, що продовжує відображення, є також факторним f.*

Зазначимо, що неперервне відображення $f : X \to Y$ має ліве обернене, якщо існує неперервне відображення $g : Y \to X$, таке, що композиція $g \circ f : X \to X$ є тотожним відображенням на X. Отож неперервне відображення $f : X \to Y$ має праве обернене, якщо існує неперервне відображення $g : Y \to X$, таке, що композиція $f \circ g : Y \to Y$ є тотожним відображенням на Y.

Теорема 3. *Неперервне відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів має ліве обернене тільки, якщо морфізм вільних однорідних просторів $f^* : H(X) \to H(Y)$, що його продовжує, має ліве обернене відображення.*

Д о в е д е н н я. Необхідність. Нехай $f : X \to Y$ — відображення, що має ліве обернене $g : Y \to X$, тобто, $g \circ f = 1_X$. Тоді $g^* \circ f^* = (g \circ f)^* = (1_X)^* = 1_{H(X)}$. Отже, відображення g^* є лівим оберненим до відображення f^*.

Достатність. Нехай $f : X \to Y$ — таке відображення, що відповідний морфізм вільних однорідних просторів $f^* : H(X) \to H(Y)$ має ліве обернене відображення $h^* : H(Y) \to H(X)$. Покладемо $h = h^*|_Y$. Нехай $r : H(X) \to X$ — ретракція, побудована у [4]. Тоді відображення $g : Y \to X$ означене як $g = r \circ h$ є неперервним як композиція неперервних відображень. Нехай $x \in X$, тоді $g \circ f(x) = r \circ h \circ f(x) = r \circ h^* \circ f^*(x) = r(x) = x$. Тобто, відображення g є лівим оберненим до відображення f.

Неперервне сюр'єктивне відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів X та Y називається R–факторним, якщо неперервність довільної дійснозначної функції $g : Y \to R$ рівносильна неперервності композиції $g \circ f$. Зазначимо [6], що кожне факторне відображення є R–факторним, а композиція R–факторних відображень є R–факторним відображенням.

Теорема 4. *Неперервне відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів є R–факторним тоді і тільки тоді, якщо морфізм вільних однорідних просторів $f^* : H(X) \to H(Y)$, що його продовжує, є R–факторним.*

Д о в е д е н н я. Необхідність. Нехай $f : X \to Y$ — R–факторне відображення топологічних просторів. Тоді відображення $f_1 : G(X) \times X \to G(Y) \times Y$ можна подати як композицію відображень $s_1 : G(X) \times X \to G(X) \times Y$ і $s_2 : G(X) \times Y \to G(Y) \times Y$. Через дискретність просторів $G(X)$ та $G(Y)$ відображеннями s_1 і s_2 будуть R–факторними, а отже R–факторною буде і їхня композиція f_1. Позначимо через $h_X : G(X) \times X \to H(X)$ і $h_Y : G(Y) \times Y \to H(Y)$ відповідні факторні відображення. Тоді $h_Y \circ f_1 = f^* \circ h_X$. Відображення $h_Y \circ f_1$ є R–факторним як композиція двох R–факторних відображень. Нехай $g : H(Y) \to R$ — дійснозначна функція така, що композиція $h = g \circ f^*$ є неперервною. Тоді композиція $g \circ f^* \circ h_X = g \circ h_Y \circ f_1$ є також неперервною, а з R-факторності відображення $h_Y \circ f_1$ випливає неперервність відображення $g : H(Y) \to R$.

Достатність. Припустимо, що відображення $f^* : H(X) \to H(Y)$ є R–факторним. Нехай $g : Y \to R$ — дійснозначна функція така, що композиція $h = g \circ f$ є неперервною. Множина дійсних чисел зі стандартною топологією, будучи топологічною групою, є об'єктом категорії однорідних просторів, тому неперервне відображення $h : X \to R$ ми можемо продовжити до неперервного морфізму $h^* = g^* \circ f^* : H(X) \to R$. З неперервності відображення h^* і R-факторності відображення f^* випливає неперервність відображення $g^* : H(Y) \to R$. Зокрема, неперервним буде і звуження $g = g^*|_Y$.

У роботі [3] Мегрелішвілі встановив, що існують негомеоморфні топологічні простори з ізоморфними вільними однорідними просторами.

Топологічні простори X та Y називаються B-еквівалентними, якщо віл однорідні простори $H(X)$ і $H(Y)$ є ізоморфними. Скажемо, що відображен $f: X_1 \to Y_1$ є B–еквівалентним відображенню $g: X_2 \to Y_2$, якщо існують топ логічні ізоморфізми $i: H(X_1) \to H(X_2)$ і $j: H(Y_1) \to H(Y_2)$ такі, що $j \circ f^* = g^*$ Нагадаємо, що ретракції $r_1 : X \to K_1$ і $r_2 : X \to K_2$ топологічного простору називаються паралельними, якщо виконано умови $r_1 \circ r_2 = r_1$ і $r_2 \circ r_1 = r_2$. встановилось у доведенні теореми 3 з роботи [7], якщо K_1 і K_2 — дискрет паралельні ретракти топологічного простору X , то фактор-відображен $q_1 : X \to X/K_1$ і $q_2 : X \to X/K_2$ є B-еквівалентними. Тобто, відображення розгл нуті у прикладі 2 з роботи [7] є B-еквівалентними. Зауважимо, що лише одне цих відображень є відкритим і лише одне має праве обернене відображення.

Таким чином, можемо зробити висновок, що властивість бути фа торним та R–факторним відображеннями, мати ліве обернене відображен зберігаються відношенням B-еквівалентості відображень; властивість бут відкритим відображенням і мати праве обернене відображення не зберігаютьс відношенням B–еквівалентності.

Для дослідження спільних властивостей B-еквівалентних просторі а також для встановлення конструкцій, що дають можливість з наявних па B-еквівалентних просторів створювати нові, потрібно, щоб ізоморфізм між вільними однорідними просторами володіли певними «хорошими властивостями. Одна з таких властивостей розглядається у такій теоремі:

Теорема 5. *Нехай X та Y — B-еквівалентні простори, $\in X$, $b \in Y$ – довільні точки. Тоді існує ізоморфізм $(h^*, \psi) : H(X) \to H(Y)$ такий, що $h^*(a) =$*

Доведення. Нехай X та Y — B-еквівалентні простори $a \in X$, $b \in Y$ $(f^*, \psi) : H(X) \to H(Y)$ — відповідний ізоморфізм. Нехай $f^*(a) = y_1 y_2^{-1} y_3 \cdots y_{2n}^{-1} y_{2n+1}$, де $y_i \in Y$. Розглянемо відображення $h^* : H(X) \to H($ означене як $h^*(x) = f^*(x) y_{2n+1}^{-1} y_{2n} \cdots y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} b$. Відображення $i : H(Y) \to H(Y$ що задається формулою $i(z) = z y_{2n+1}^{-1} y_{2n} \cdots y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} b$ для всіх $z \in H(Y)$, чере однорідність топологічного простору $H(Y)$, є автогомеоморфізмом цього простору. Відображення $h^* = i \circ f^*$ є композицією двох гомеоморфізмів, тобто є гомеоморфізмом. Для того, щоб показати, що пара (h^*, ψ) є топологічним ізоморфізмом вільних однорідних просторів $H(X)$ та $H(Y)$, достатньо переві рити умову узгодженості [3] відображення h^* та гомоморфізму ψ:

$$h^*(gx) = \psi(g)\, h^*(x) \text{ для всіх } g \in G(X),\ x \in H(X).$$

Дійсно, нехай $g \in G(X)$, $x \in H(X)$, тоді

$$\psi(g)h^*(x) = \psi(g) f^*(x) y_{2n+1}^{-1} y_{2n} \cdots y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} b = f^*(gx) y_{2n+1}^{-1} y_{2n} \cdots y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} b = h^*(gx).$$

Оскільки,

$$h^*(a) = f^*(a) y_{2n+1}^{-1} y_{2n} \cdots y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} b = y_1 y_2^{-1} y_3 \cdots y_{2n}^{-1} y_{2n+1} y_{2n+1}^{-1} y_{2n} \cdots y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} b = b,$$

то теорема є доведеною.

1. Пирч Н. М. Вільні однорідні простори та їхні підпростори / Н. М. Пирч // Математичні методи та фізико-механічні поля (у друці). 2. Бельнов В. К. Размерность топологически однородных пространств и свободные однородные пространства / В. К. Бельнов // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 238. — № 4. — С. 781–784. 3. Мегрелишвили М. Г. Топологические пространства с изоморфными свободными однородными пространствами / М. Г. Мегрелишвили // Сообщения АН Грузинской ССР. — 1981. — Т. 103. — № 3. — С. 549–552. 4. Окромешко Н. Г. О ретракциях однородных пространств / Н. Г. Окромешко // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 268. — № 3. — С. 547-551. 5. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. — М. : Мир, 1986. — 751 с. 6. Okunev O. G. A method for consructing examples of M-equivalent spaces / O. G. Okunev // Top. Appl. — 1990. — V.36. — P. 157—171; Correction: Top. Appl. — 1993. — V. 49. — P. 191—192. 7. Pyrch N. M. On n the isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces I / N. M. Pyrch // Вісник Львівського національного університету: серія мех.- мат. — 2007. — Вип. 63. — С. 224–232.

МОРФИЗМИ СВОБОДНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассматривается действие функтора свободного однородного пространства на непрерывные отображения топологических пространств.

MORFIZMI OF FREE HOMOGENEOUS SPACES

In the paper we consider the action of the functor of the free homogeneous space on the continuous mappings of topological spaces.

Стаття надійшла 01.09.2009