

УДК 539.3

**О. М. Римар***Львівський державний університет безпеки життєдіяльності***РОЗПОДІЛ НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ ВЗДОВЖ ОСІ  $z$   
ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ ДВОХ ТІЛ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ**

Одержано і доведено до інженерного рівня формули для обчислення нормальних напружень у точках осі  $z$  нового розв'язку просторової задачі теорії пружності про контакт двох тіл подвійної кривини. Обчислено та досліджено нормальні напруження в точках осі  $z$  та знайдено найбільш навантажені та небезпечні точки.

**Напруження, контактуючі тіла, ексцентриситет, просторова задача, теорія пружності**

Міцність деталей, які працюють в умовах контактного навантаження, значною мірою визначаються параметрами напруженого стану. Їх обчислення та знаходження на цій основі найбільш навантажених точок та зон деталей є найважливішим питанням підвищення надійності та довговічності машин і механізмів. У точках осі  $z$  контактуючих деталей (в основному описаних поверхнями подвійної кривини) нормальні осьові напруження є головними, оскільки дотичних немає.

У праці [1] ми одержали формули для визначення нормальних напружень у загальному випадку нового розв'язку [4] просторової задачі теорії пружності про контакт двох тіл подвійної кривини. У праці [2] досліджено невизначеності та зв'язки між нормальними напруженнями. Для точок осі  $z > 0$  за умовами  $x = 0, y = 0$  для еліптичного контакту одержані в [3] формули можна записати так:

$$\sigma_z = -p_0 \frac{1}{1+2\nu} \left[ 2\nu \cdot \left\{ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - [E(k) - E(\varphi, k)] \cdot \operatorname{tg} \varphi \right\} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right], \quad (1)$$

$$\sigma_x = -p_0 \frac{1}{1+2\nu} \left[ \begin{aligned} & 2\nu \cdot \left\{ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - [E(k) - E(\varphi, k)] \cdot \operatorname{tg} \varphi \right\} \\ & - 2(1-2\nu) \cdot k'^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\cos^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \psi)^3}} \\ & - (4\nu-1) \cdot k'^2 \cdot \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\sin \psi \cdot \cos \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \psi)^3}} \end{aligned} \right], \quad (2)$$

$$\sigma_y = -p_o \frac{1}{1+2\nu} \left[ \begin{aligned} & 2\nu \cdot \left\{ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - [E(k) - E(\varphi, k)] \cdot \operatorname{tg} \varphi \right\} \\ & - 2(1-2\nu) \cdot \operatorname{tg} \varphi \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\cos^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \psi)}} \\ & - (4\nu-1) \cdot \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\sin \psi \cdot \cos \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \psi)}} \end{aligned} \right], \quad (3)$$

де  $p_o$  — тиск у точці початкового контакту,

$$p_o = \frac{3P}{2\pi \cdot ab} \quad \text{для } 0 \leq k \leq 1, \quad (4)$$

$$p_o = \frac{2P}{\pi b l} \quad \text{для } k = 1.$$

У формулах (1), (2), (3)  $E(k)$  — повний еліптичний інтеграл у формі Лежандра;  $E(\varphi, k)$  — такий же неповний інтеграл,  $k'$  — коефіцієнт стиснення еліпса площадки контакту;  $a, b$  — півосі еліпса площадки контакту;  $P$  — зусилля стиснення;  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона;  $k$  — ексцентриситет еліпса,  $k^2 = 1 - k'^2$ ;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t}}{b} = \operatorname{arctg} \frac{z}{b} = \operatorname{arctg}(\bar{z}), \quad (5)$$

де  $\bar{z}$  — безрозмірна відносна координата, а параметр  $t$  визначається як найбільший корінь рівняння

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{t} = 1,$$

звідси для нашого випадку  $t = z^2$ .

Сума нормальних напружень визначається з формул (1), (2), (3) як

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)_{z>0} = -\frac{2(1+\nu)}{(1+2\nu)} p_o \left\{ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - [E(k) - E(\varphi, k)] \cdot \operatorname{tg} \varphi \right\}. \quad (6)$$

У формули (2), (3) входять інтеграли  $I_2, I_3$ , які визначаються залежностями:

$$I_2 = \frac{2}{ab} k'^2 \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{\sin \psi \cos \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \psi)^3}} = \frac{2}{ab} \frac{k'}{k^2} \left[ 1 - \frac{k'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right],$$

$$I_3 = \frac{2}{ab} \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{\sin \psi \cos \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2}{ab} \left[ \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - k'}{k^2} \right].$$

У формули (1), (2), (3) входять еліптичні інтеграли, які мають особливості в часткових випадках задачі, що не дає можливості використовувати ці формули безпосередньо в інженерних обчисленнях.

Метою роботи є знаходження формул для нормальних напружень у часткових випадках задачі, обчислення цих напружень та аналіз напруженого стану контактуючих тіл стосовно особливостей розподілу нормальних напружень у точках осі  $z$  та виявлення небезпечних точок.

Для точок осі  $z$  колового контакту ( $a=b$ ,  $k'=1$ ,  $k=0$ ,  $E(k)=F(k)=\pi/2$ ,  $E(\varphi, k)=F(\varphi, k)=\varphi$ ) із формул (1), (2), (3)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{P_o}{1+2\nu} \cdot \left\{ 2\nu \left[ 1 - \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot \operatorname{tg} \varphi \right] + \cos^2 \varphi \right\}, \\ \sigma_x = \sigma_y &= -\frac{P_o}{1+2\nu} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot \operatorname{tg} \varphi \right] - \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \varphi \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де інтеграли

$$\left. \begin{aligned} I_2 = I_3 &= \frac{2}{b^2} \int_{\varphi}^{\pi/2} \sin \psi \cos \psi \cdot d\psi = \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}, \\ (I_2 + I_3)_{z>0} &= \frac{2}{b^2} \cos^2 \varphi, \end{aligned} \right\}$$

а сума нормальних напружень із формули (6)

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)_{z>0} = -\frac{2(1+\nu)}{(1+2\nu)} P_o \left[ 1 - \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot \operatorname{tg} \varphi \right]. \quad (8)$$

Для точок осі  $z$  початкового контакту тіл по лінії ( $k'=0$ ,  $k=1$ ,  $a=\infty$ ,  $E(k)=1$ ,  $E(\varphi, k)=\sin \varphi$ ) із формул (1), (2), (3)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -P_o \cdot \frac{1}{1+2\nu} \left\{ \frac{(1-\sin \varphi) \cdot 2\nu}{\cos \varphi} + \cos \varphi \right\}, \\ \sigma_x &= -P_o \cdot \frac{2\nu}{1+2\nu} \frac{1-\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ \sigma_y &= -P_o \cdot \frac{1}{1+2\nu} \frac{(1-\sin \varphi) \cdot (1-\sin \varphi - 2\nu)}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для цього випадку (лінійного контакту)

$$I_2 = 0, \quad I_3 = \frac{2}{ab} \cos \varphi,$$

при цьому із формул (6)

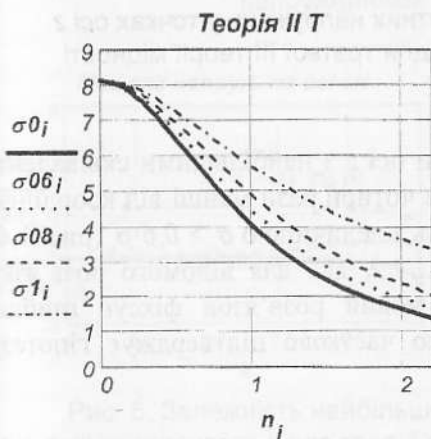
$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)_{z>0} = -\frac{2(1+\nu)}{1+2\nu} P_o \left\{ \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi} \right\}. \quad (10)$$

У діапазоні значення ексцентриситета  $0 \leq k \leq 1$  із формул для напружень у точках осі  $z$ , прийнявши  $\varphi = 0$ , можна одержати формули для точки (лінії) початкового контакту. На безмежності всі напруження, що показано у праці [2], прямують до нуля.

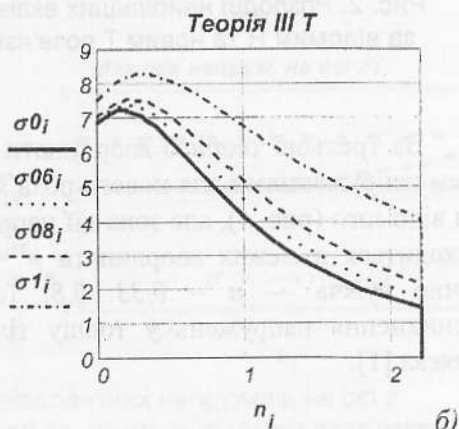
Знайдені формули дають можливість обчислити нормальні напруження для довільної точки осі  $z$  з безрозмірною координатою  $\bar{z} = n$ .

Оскільки для точок осі  $z$  нормальні напруження є *головними*, то для цих точок легко обчислити еквівалентні напруження за основними теоріями міцності. Результати обчислень таких еквівалентних напружень ілюструють наведені графіки. За допомогою створених програм для конкретних значень ексцентриситета  $k$  обчислені нормальні напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  та еквівалентні напруження за другою (II), третьою (III) та четвертою (IV) теоріями міцності для розв'язків нового (Т) та відомого (Н) Герца. Результати обчислень еквівалентних напружень у безрозмірних одиницях за допомогою створених програм відображено графічно на рисунках, де конкретне значення таких напружень  $\sigma = \sigma_i \cdot 10^{-1} \cdot p_o$ .

На рис. 1 подано залежності еквівалентних напружень від відносної координати точки  $n = \operatorname{tg}\varphi = z/b = \bar{z}$ . За всіма теоріями точного розв'язку характер таких залежностей змінюється незначно — тільки для другої теорії напруження в точках площадки є найбільшими. Однак за новим розв'язком для всіх теорій міцності еквівалентні напруження значно перевищують такі ж за відомим. Побудови (рис. 3) показують, що найбільші еквівалентні напруження за третьою теорією для нового розв'язку перевищують такі ж для відомого приблизно на 30%.



а)



б)

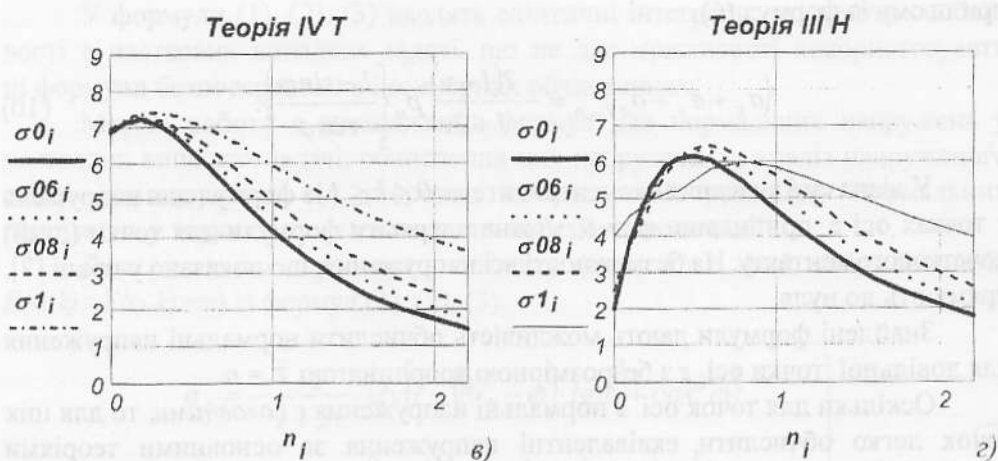


Рис. 1. Розподіл еквівалентних напружень для другої, третьої та четвертої теорій міцності в точках осі  $z$  нового Т та відомого Н розв'язків для значень ексцентриситета  $k = 0, 0,6, 0,8, 1$

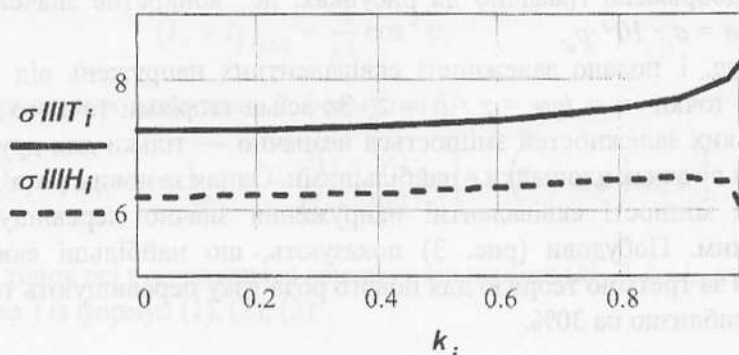


Рис. 2. Розподіл найбільших еквівалентних напружень у точках осі  $z$  за відомим Н та новим Т розв'язками для третьої III теорії міцності

За третьою теорією координати точки осі  $z$  з найбільшими еквівалентними напруженнями для нового розв'язку в чотири рази менші від координат для відомого (рис. 4), але зона дії напружень з величиною  $\sigma_i > 0,6 \cdot p_0$  (рис. 1,б) знаходиться в межах координати  $n = 0,6 \dots 1,2$ , яка для відомого розв'язку значно вужча —  $n = 0,33 \dots 0,8$ . Тобто новий розв'язок фіксує глибше проникнення напружень у товщу тіла, що частково підтверджує гіпотезу Беяєва [1].

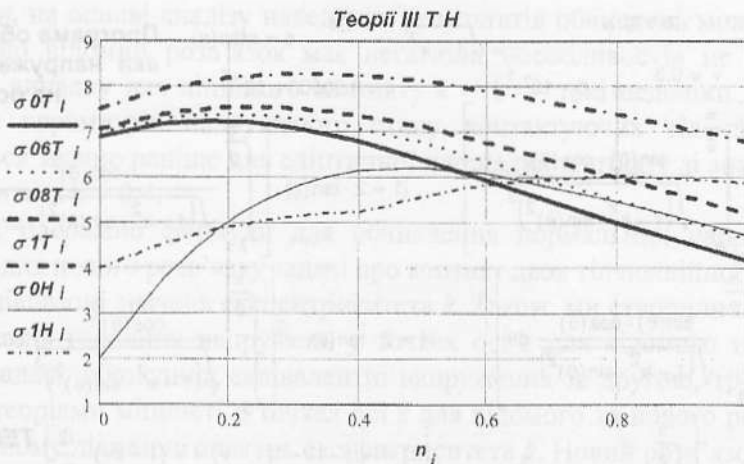


Рис. 3. Розподіл еквівалентних напружень для третьої III теорії міцності в точках осі z: T — для нового розв'язку, H — для розв'язку Герца

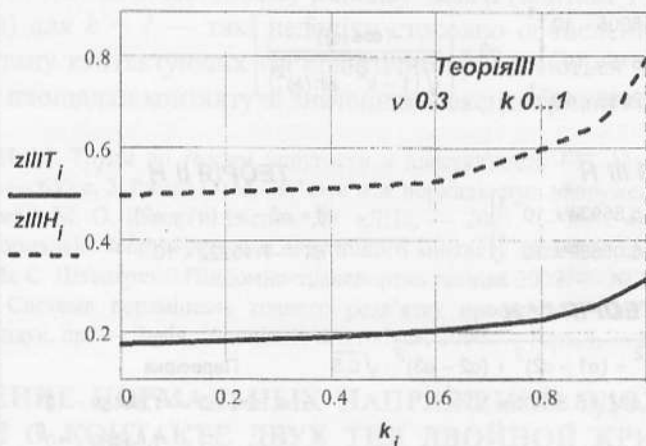


Рис. 4. Залежність координати точки осі z з найбільшими еквівалентними напруженнями від ексцентриситета k

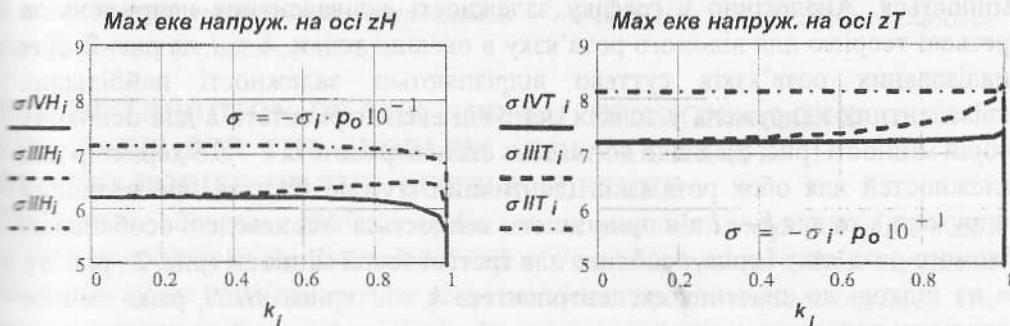


Рис. 5. Залежність найбільш еквівалентних напружень на осі z від ексцентриситета k для теорій міцності за новим та відомим розв'язками

$$k = 0.8$$

$$n = \operatorname{tg} \phi$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - k^2}$$

$$n = 0.4$$

$$\phi = \operatorname{atan}(n)$$

Програма обчислення  
екв напружень II, III, IV  
на осі z

$$\operatorname{rad}$$

$$v = 0.3$$

$$\varepsilon = 6 \times 10^{-1}$$

$$\phi = 3.80506 \times 10^{-1}$$

$$i2 = 2 \cdot \varepsilon \cdot \left[ \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{(1 - k^2 \cdot \sin(\theta)^2)^3}} d\theta \right]$$

$$i1 = 2 \cdot \tan(\phi) \cdot \left[ \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)^2}{\sqrt{(1 - k^2 \cdot \sin(\theta)^2)} \cdot \sin(\theta)^2} d\theta \right]$$

$$i3 = 2 \cdot \left[ \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{(1 - k^2 \cdot \sin(\theta)^2)}} d\theta \right]$$

$$i4 = 2 \cdot \tan(\phi) \cdot \varepsilon \cdot \left[ \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)^2}{\sqrt{(1 - k^2 \cdot \sin(\theta)^2)^3}} d\theta \right]$$

$$i5 = 2 \cdot \tan(\phi) \cdot \left[ \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)^2}{\sqrt{(1 - k^2 \cdot \sin(\theta)^2)}} d\theta \right]$$

$$\sigma1 = \left[ v \cdot i1 - 1(1 - v)i4 + (1 - 2v) \cdot \frac{i2}{2} \right]$$

**ТЕОРІЯ II Н**

$$\sigma2 = \left[ v \cdot i1 - (1 - v)i5 + (1 - 2v) \cdot \frac{i3}{2} \right]$$

$$\sigma3 = \frac{-(\cos(\phi))^2}{\sqrt{(1 - k^2 \cdot \sin(\phi)^2)}}$$

$$\sigma x1 \quad \sigma1 = -3.45905 \times 10^{-1}$$

$$\sigma y2 \quad \sigma2 = -2.9615 \times 10^{-1}$$

$$\sigma z3 \quad \sigma3 = -9.02839 \times 10^{-1}$$

### ТЕОРІЯ III Н

$$\sigma III = \sigma3 - \sigma1 = (-5.56934 \times 10^{-1})$$

$$\sigma III = \sigma3 - \sigma2 = (-6.06689 \times 10^{-1})$$

### ТЕОРІЯ II Н

$$\sigma II = \sigma3 - v \cdot (\sigma1 + \sigma2)$$

$$\sigma II = -7.10222 \times 10^{-1}$$

### ТЕОРІЯ IV Н

$$\sigma IV = \sqrt{(\sigma3 - \sigma1)^2 + (\sigma1 - \sigma2)^2 + (\sigma2 - \sigma3)^2} \cdot \sqrt{0.5}$$

$$\sigma IV = 5.83405 \times 10^{-1}$$

Перевірка

$$\sigma1 + \sigma2 + \sigma3 = -1.54489 \times 10^0$$

$$\Sigma = -1.54489 \times 10^0$$

0	5.2
0.1	6.05
0.15	6.38
0.175	6.52
0.18	6.54
0.2	6.64
0.23	6.76
0.25	6.83
0.28	6.92
0.31	7
0.35	7.06
0.4	7.1
0.5	7.06
0.6	6.9
0.8	6.34
1	5.65

На рис. 1, 2 для значень ексцентриситета  $k = 1$  відомого розв'язку характер поведінки еквівалентних напружень за третьою теорією різко змінюється. Аналогічно у графіку залежності еквівалентних напружень за третьою теорією для відомого розв'язку в околиці точки  $k = 1$  на рис. 2. Для аналізованих розв'язків суттєво відрізняються залежності найбільших еквівалентних напружень у точках осі z від ексцентриситета  $k$  для основних теорій міцності (рис. 5). Якщо до значень ексцентриситета  $k = 0,8$  характер цих залежностей для обох розв'язків ідентичний (тут не йдеться про величину напружень), то для  $k \rightarrow 1$  він принципово змінюється. Усі наведені особливості відомого розв'язку Герца, особливо для третьої теорії міцності (рис. 2 ; рис. 5), де на підході до значення ексцентриситета  $k = 1$  крива  $\sigma III$ , різко змінює напрям, характеризують його невідповідність до фізичної сутності напруженого стану. Для цього значення  $k$  відомим розв'язком не виконуються і вимоги статички про «закріплення» точок тіла на безмежності.

Звідси, на основі аналізу наведених результатів обчислень можна дійти висновку, що відомий розв'язок має негативні «особливості» не тільки в частковому випадку для лінійного контакту  $k = 1$  — такі недоліки стосовно обчислення параметрів напруженого стану контактуючих тіл практично проявляються значно раніше для еліптичної площадки контакту зі значеннями ексцентриситета  $k > 0,4$ .

Отже, одержано формули для обчислення нормальних напружень у точках осі  $z$  для нового розв'язку задачі про контакт двох тіл подвійної кривини в повному діапазоні значень ексцентриситета  $k$ . Також, ми створили програми для обчислення головних напружень у точках осі  $z$  для відомого та нового розв'язків задачі, обчислили еквівалентні напруження за другою, третьою та четвертою теоріями міцності в точках осі  $z$  для відомого та нового розв'язків задачі в повному діапазоні значень ексцентриситета  $k$ . Новий розв'язок фіксує глибше проникнення напружень у товщу тіла. На основі аналізу наведених результатів обчислень показано, що відомий розв'язок має негативні «особливості» не тільки в частковому випадку задачі (контакт тіл з паралельними твірними) для  $k = 1$  — такі недоліки стосовно обчислення параметрів напруженого стану контактуючих тіл практично проявляються значно раніше для еліптичної площадки контакту зі значеннями ексцентриситета  $k > 0,4$ .

1. Беляев Н. М. Труды по теории упругости и пластичности / Н. М. Беляев. — М. : Гостехиздат, 1957. — 632 с. 2. Римар О. М. Зв'язок між нормальними напруженнями для задачі Герца / О. М. Римар, М. О. Римар // Вісник ДУ «ЛП». — 2001. — Вип. 442. — С. 80–86.
3. Римар О. М. Нормальні напруження для еліптичного контакту задачі Герца / О. М. Римар, І. С. Керницький, Б. С. Штангет // Підйомно-транспортна техніка 2002. — № 1, 2. — С. 53–59.
4. Римар О. М. Система переміщень точного розв'язку просторової контактної задачі / О. М. Римар // Зб. наук. пр. — Львів : Асоціація «Автобус», 2000. — Вип. 4. — С.96–100.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВДОЛЬ ОСИ $z$ ДЛЯ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ ДВУХ ТЕЛ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ

*Получено и доказано до инженерного уровня формулы для вычисления нормальных напряжений в точках оси  $z$  нового решения пространственной задачи теории упругости о контакте двух тел двойной кривизны. Вычислены и исследованы нормальные напряжения в точках оси  $z$  и найдены наиболее нагруженные и опасные точки.*

## THE DISTRIBUTION OF THE NORMAL TENSIONS ALONG THE Z AXIS FOR THE PROBLEM ABOUT CONTACT OF TWO BODIES OF THE DOUBLE FLEXURE

*The formulas about the calculation of the normal tensions in the points of the  $z$  axis of the new solution of the dimensional task of the elasticity theory about contact of two bodies of the double flexure are given and driver into the engineering level. The normal tensions in the points of the  $z$  axis are investigated and calculated and the most loaded and dangerous points are found.*

Стаття надійшла 11.05.2010