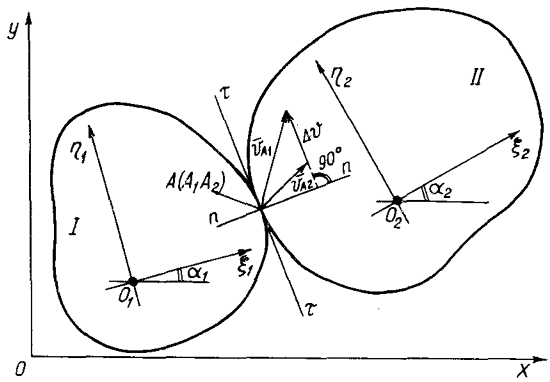
Е. О. САВВІН

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

В роботі пропонується метод аналітичного визначення координат конструктивного профілю кулачка в найбільш загальному вигляді — при плоскопаралельному русі кулачка і веденої ланки і при довільній формі профілю веденої ланки. Такий метод дає можливість одержати розрахункові формули або алгоритм обчислень для будь-якого плоского кулачкового механізму як окремий випадок розв'язання загальної задачі. Це стосується як найпростіших триланкових механізмів, так і складних, ведені ланки яких здійснюють плоскопаралельний рух. Метод придатний також для механізмів перекочувальних важелів і цілого ряду просторових кулачкових механізмів, завдання синтезу яких зводиться до синтезу плоских механізмів.



Розрахункова схема кулачкового механізму.

Уявімо механізм у найбільш загальному вигляді — як два жорсткі контури *I* і *II* довільної конфігурації (див. рисунок). Кожний контур здійснює плоскопаралельний рух.

A — точка дотику контурів;

O_1 і O_2 — точки, в яких контури з'єднуються з іншими ланками механізму. Вони можуть не бути безпосередньо точками контакту контурів з іншими ланками, але їх координати повинні визначатися на підставі положення цих ланок;

$\xi_1 o_1 \eta_1$ і $\xi_2 o_2 \eta_2$ — системи координат, жорстко зв'язані з контурами;

XOY — нерухома система координат, жорстко зв'язана із стояком механізму;

α_1, α_2 — кути нахилу систем $\xi_1 o_1 \eta_1$ і $\xi_2 o_2 \eta_2$ відносно системи XOY;

$\overline{V}_{A1}$ — вектор швидкості точки A_1;

$\overline{V}_{A2}$ — вектор швидкості точки A_2;

$\Delta\overline{V} = \overline{V}_{A1} - \overline{V}_{A2}$ — вектор різниці швидкостей точок A_1 і A_2.

На підставі рівності координат точок дотику A_1 і A_2 ($x_{A1} = x_{A2}$; $y_{A1} = y_{A2}$) складемо основні рівняння руху контурів, які називатимемо рівняннями загальної точки.

$$x_{01} + \xi_1 \cdot \cos\alpha_1 - \eta_1 \cdot \sin\alpha_1 = x_{02} + \xi_2 \cdot \cos\alpha_2 - \eta_2 \cdot \sin\alpha_2, \qquad (1)$$

$$y_{01} + \xi_1 \cdot \sin\alpha_1 + \eta_1 \cdot \cos\alpha_1 = y_{02} + \xi_2 \cdot \sin\alpha_2 + \eta_2 \cdot \cos\alpha_2, \qquad (2)$$

де x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02}— координати точок O_1 і O_2 в системі XOY;

ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 — координати точок A_1 і A_2 в системах $\xi_1 o_1 \eta_1$ і $\xi_2 o_2 \eta_2$.

Розглянемо умову дотику контурів.

У точках A_1, A_2 дотичні до контурів *I* і *II* мають рівні кутові коефіцієнти, які визначаються як окремі похідні від ординат (y) по абсцисах (x):

$$\frac{\partial y_{A1}}{\partial x_{A1}} = \frac{\partial y_{A2}}{\partial x_{A2}}.$$

Використовуючи рівняння (1) і (2), після деяких перетворень одержимо рівняння дотику контурів:

$$\frac{1 - \frac{d\eta_1}{d\xi_1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \frac{d\eta_1}{d\xi_1}} = \frac{1 - \frac{d\eta_2}{d\xi_2} \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 + \frac{d\eta_2}{d\xi_2}}. \qquad (3)$$

Крім абсолютного, розглянемо відносний рух контурів *I* і *II*. Рівняння руху точки A_2 в системі $\xi_1 o_1 \eta_1$ матимуть такий вигляд:

$$\xi_{21} = A + \xi_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \eta_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (4)$$

$$\eta_{21} = B + \xi_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \eta_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (5)$$

де

$$A = (y_{02} - y_{01}) \cdot \sin\alpha_1 + (x_{02} - x_{01}) \cdot \cos\alpha_1, \qquad (6)$$

$$B = (y_{02} - y_{01}) \cdot \cos\alpha_1 - (x_{02} - x_{01}) \cdot \sin\alpha_1. \qquad (7)$$

Похідні від цих координат за часом t дорівнюють проекціям вектора $\Delta\bar{V}$ на координатній осі $\xi_1 o_1 \eta_1$.

З рівнянь проекцій вектора різниці $\Delta\bar{V}$ на координатні осі можна визначити кут нахилу дотичної до контурів у точці їх дотику в системі $\xi_1 o_1 \eta_1$:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\dot{\eta}_{21}}{\dot{\xi}_{21}}. \qquad (8)$$

Розглянуті основні рівняння абсолютного і відносного руху контурів *I* і *II* покладено в основу пропонованого методу аналітичного синтезу плоских кулачкових механізмів.

Слід відзначити, що у випадку утворення контурами *I* і *II* центроїдної пари проекції вектора $\Delta\bar{V}$ на осі $\xi_1 o_1 \eta_1$ дорівнюють нулю ($\dot{\xi}_{21} = 0$, $\dot{\eta}_{21} = 0$) і синтез таких механізмів здійснюється на підставі рішення рівнянь (4), (5).

В розглянутих вище співвідношеннях контури *I* і *II* абсолютно рівноцінні. Надалі домовимося називати контур *I* ведучою ланкою (кулачком), а контур *II* — веденою ланкою. Будемо вважати відомими координатами точок O_1 і O_2 кути повороту контурів α_1 і α_2, кутові швидкості обертання контурів ω_1 і ω_2.

Будь-яка з цих величин у кожному конкретному випадку може бути постійною, змінною або дорівнювати нулю.

При розв'язуванні задачі синтезу звичайних кулачкових механізмів необхідно вважати відомим профіль веденої ланки, який аналітично описується рівнянням $\eta_2 = f(\xi_2)$.

Рівняння координат веденої ланки ξ_2 і η_2 в параметричній формі від загального параметра (час t або кут α_1) нам невідомі.

Розглянемо задачу визначення координат конструктивного профілю кулачка (ξ_1 і η_1).

В рівняннях (4), (5) координати відносного руху контура II (ξ_{21} і η_{21}) дорівнюють координатам контура I в системі $\xi_1 o_1 \eta_1$ ($\xi_1 = \xi_{21}$; $\eta_1 = \eta_{21}$).

У цих рівняннях, крім шуканих величин ξ_1 і η_1, невідомими є ξ_2 і η_2. Координати ξ_2 і η_2, як функції загального параметра t або α_1, можна визначити, якщо розглянути положення дотичної до контура I в точці дотику в системі $\xi_1 o_1 \eta_1$.

Положення дотичної до контура I визначається рівнянням (8). У той же час положення дотичної в системі $\xi_1 o_1 \eta_1$ можна визначити як похідну від η_1 за ξ_1. Тоді

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \frac{\dot{\eta}_{21}}{\dot{\xi}_{21}}. \tag{9}$$

Оскільки координати ξ_1 і η_1, а значить і похідна, невідомі, то на підставі рівняння (3) здійснимо заміну $\frac{d\eta_1}{d\xi_1}$ через відомі α_1, α_2, $\frac{d\eta_2}{d\xi_2}$.

Похідну $\frac{d\eta_2}{d\xi_2}$ вважаємо відомою з рівняння $\eta_2 = f(\xi_2)$.

З рівняння (3) одержуємо

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{d\eta_2}{d\xi_2}}{1 - \frac{d\eta_2}{d\xi_2} \cdot \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)}. \tag{10}$$

Підставивши в рівняння (9) вирази з рівнянь (4), (5), (10), після перетворень маємо:

$$\eta_2 \cdot \frac{d\eta_2}{d\xi_2} + \xi_2 - \frac{d\eta_2}{d\xi_2} \cdot R - F = 0, \tag{11}$$

де

$$F = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \cdot [\dot{A} \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \dot{B} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)], \tag{12}$$

$$R = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \cdot [\dot{A} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \dot{B} \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]. \tag{13}$$

Рівняння (11) є основним для параметрації координат ξ_2 і η_2. Воно розв'язується сумісно з рівнянням

$$\eta_2 = f(\xi_2).$$

На підставі одержаних залежностей процес розв'язання задачі про параметрацію координат веденої ланки (ξ_2 і η_2) і визначення загальних виразів для координат конструктивного профілю кулачка (ξ_1 і η_1) можна зобразити так.

1. Задаємось формою профілю веденої ланки і записуємо його рівняння:

$$\eta_2 = f(\xi_2). \tag{14}$$

2. Знаходимо похідну від рівняння (14):

$$\frac{d\eta_2}{d\xi_2} = \frac{d}{d\xi_2}[f(\xi_2)].$$

3. Замінюємо в рівнянні (11) η_2 і $\frac{d\eta_2}{d\xi_2}$ їх виразами через ξ_2 і одержуємо рівняння з одним невідомим.

4. Розв'язавши рівняння (11), одержуємо формулу для визначення ξ_2.

5. Підставивши ξ_2 в рівняння (14), одержуємо формулу для визначення η_2.

6. Підставивши ξ_2 і η_2 в рівняння (4), (5), одержуємо формули для визначення координат конструктивного профілю кулачка ξ_1 і η_1 при вибраній формі веденої ланки.

За існуючою класифікацією ведені ланки кулачкових механізмів можуть мати такі профілі: загострений, роликовий, плоский і будь-який криволінійний.

Розглянемо розв'язання задачі синтезу кулачкових механізмів для основних видів профілю веденої ланки.

ЗАГОСТРЕНИЙ ПРОФІЛЬ ВЕДЕНОЇ ЛАНКИ

Якщо взяти за початок рухомої системи координат точку загострення веденої ланки, координати ξ_2 і η_2 будуть дорівнювати нулю і з рівнянь (4) і (5) одержимо координати конструктивного профілю кулачка $\xi_1 = A$, $\eta_1 = B$, де значення A і B визначаються з формул (6) і (7).

Необхідно відзначити, що на вибір положення рухомих систем координат не накладається жодних обмежень.

При іншому виборі положення системи $\xi_2 o_2 \eta_2$ для даного випадку координати ξ_2 і η_2 будуть постійними величинами, значення яких визначаються на підставі конструктивних розмірів ланок механізму.

ПЛОСКИЙ ПРОФІЛЬ ВЕДЕНОЇ ЛАНКИ

Для плоского профілю веденої ланки найбільш просте рішення одержимо, коли одну з координатних осей системи $\xi_2 o_2 \eta_2$ сумістити з площиною цієї ланки. В цьому випадку одна координатна точка A_2 буде змінною, а друга дорівнюватиме нулю.

Приймемо, що ξ_2 є змінна величина і вісь $o_2\xi_2$ співпадає з площиною веденої ланки. При цьому координата η_2 і похідна $\frac{d\eta_2}{d\xi_2}$ дорівнюють нулю. Підставивши значення ξ_2, η_2 і $\frac{d\eta_2}{d\xi_2}$ в рівняння (11), одержимо $\xi_2 = F$.

Формули для визначення координат конструктивного профілю кулачка при плоскій веденій ланці матимуть такий вигляд:

$$\xi_1 = A + F \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \tag{15}$$

$$\eta_1 = B + F \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{16}$$

ВЕДЕНА ЛАНКА З РОЛИКОМ НА КІНЦІ АБО З ПРОФІЛЕМ, ВИКОНАНИМ ПО ДУЗІ КОЛА

Сьогодні аналітичне визначення конструктивного профілю кулачка розбивається на дві частини. Спочатку визначається теоретичний (центровий) профіль кулачка. Після цього визначається конструктивний профіль.

Розглянемо застосування рівнянь (4), (5), (11), (14) для визначення конструктивного профілю кулачка. Будемо вважати ролик жорстко зв'язаним з веденою ланкою. Рівноцінність такого розв'язання очевидна.

Приймаємо за початок рухомої системи координат O_2 центр ролика. Рівняння кола в системі $\xi_2 o_2 \eta_2$ матиме вигляд $\xi^2{}_2 + \eta^2{}_2 = r^2$, де r — радіус ролика.

Звідси

$$\eta_2 = \sqrt{r^2 - \xi_2^2}. \tag{17}$$

Продиференціювавши рівняння кола, одержимо формулу для визначення $\frac{d\eta_2}{d\xi_2}$:

$$\frac{d\eta_2}{d\xi_2} = -\frac{\xi_2}{\eta_2}. \tag{18}$$

Підставивши величини (17) і (18) у рівняння (11), після ряду перетворень одержимо формули для визначення координат ξ_2 і η_2 в параметричній формі:

$$\xi_2 = \frac{r\ F}{\sqrt{R^2 + F^2}}, \tag{19}$$

$$\eta_2 = \frac{r \cdot R}{\sqrt{R^2 + F^2}}. \tag{20}$$

Для визначення координат конструктивного профілю кулачка треба підставити значення ξ_2 і η_2 з формул (19) і (20) в рівняння (4) і (5):

$$\xi_1 = A + \frac{r}{\sqrt{R^2 + F^2}} \cdot [F \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + R \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)], \tag{21}$$

$$\eta_1 = B + \frac{r}{\sqrt{R^2 + F^2}} \cdot [F \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + R \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]. \tag{22}$$

ВИЗНАЧЕННЯ КУТІВ ТИСКУ

Однією з важливих характеристик кулачкового механізму є кут тиску. Кутом тиску називається гострий кут між вектором абсолютної швидкості веденої ланки і нормаллю до профілю кулачка в точці дотику.

Виведені вище залежності дають можливість визначити кут тиску для загального випадку кулачкового механізму. Напрям вектора абсолютної швидкості точки дотику веденої ланки можна визначити з рівнянь (1) і (2).

Перша частина цих рівнянь являє собою координати точки дотику веденої ланки. Продиференціювавши ці рівняння, одержимо проекції абсолютної швидкості на координатні осі:

$$\dot{x}_{A2} = \dot{x}_{02} - \xi_2 \cdot \omega_2 \cdot \sin\alpha_2 - \eta_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos\alpha_2, \tag{23}$$

$$\dot{y}_{A2} = \dot{y}_{02} + \xi_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos\alpha_2 - \eta_2 \cdot \omega_2 \cdot \sin\alpha_2. \tag{24}$$

Звідси легко визначається кут нахилу вектора абсолютної швидкості:

$$\gamma_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot{y}_{A2}}{\dot{x}_{A2}}. \tag{25}$$

Кут нахилу до профілю кулачка γ_1 можна визначити з рівнянь проекцій вектора $\Delta\bar{v}$. Відносно рухомих осей $\xi_1 o_1 \eta_1$ кут γ_{11} визначається з формули

$$\gamma_{11} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\dot{\xi}_{21}}{\dot{\eta}_{21}}\right). \tag{26}$$

Відносно нерухомої системи координат кут дорівнює

$$\gamma_2 = \gamma_{11} + \alpha_1. \tag{27}$$

На підставі одержаних величин γ_2 і γ_1 визначаємо кут тиску

$$\nu = \gamma_1 - \gamma_2 = \mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{\dot{\xi}_{21}}{\dot{\eta}_{21}}\right) + \alpha_1 - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\dot{y}_{A2}}{\dot{x}_{A2}}. \tag{28}$$

З цього виразу як окремі випадки можна одержати формули для визначення кута тиску в будь-якому плоскому кулачковому механізмі.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. Л. В. Корчемный. Исследование плоских кулачковых механизмов при переменной кривизне профиля ведомого звена. Труды семинара по ТММ, т. XXIII, вып. 91, 1962.
3. М. Л. Орликов. Кулачковые механизмы машин-автоматов. Машгиз, М., 1955.
4. Г. А. Ротбарт. Кулачковые механизмы. М., 1960.
5. К. В. Тир. Комплексный расчет кулачковых механизмов. Машгиз, М.—К., 1958.

Э. А. САВВИН

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Резюме

Рассмотрен обобщенный аналитический метод расчета координат профилей кулачков при любых заданных законах движения ведущего и ведомого звеньев кулачковых механизмов произвольной схемы. Использование предлагаемого метода перспективно в связи с расширением применения быстродействующих электронных вычислительных цифровых машин при инженерном синтезе механизмов.

E. A. SAVVIN

ANALYTICAL METHOD OF PLANE CAM MECHANISMS SYNTHESIS

Summary

A generalized analytical method is considered for the calculation of cam profile coordinates at any given metion law of driving and driven links of cam mechanisms of arbitrary scheme. The use of the proposed method may be advantantageous in perspective in viev of broadening application of high-speed electronic digital computers for the engeneering synthesis of mechanisms.