

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИГОТОВЛЕННЯ ЕТИКЕТНОЇ ПРОДУКЦІЇ З ПРОГНОЗОВАНОЮ ТОЧНІСТЮ

Вивчимо питання підвищення одного з основних показників якості виготовлення етикетної продукції — точності її геометричних параметрів.

**Математична модель етикетки.** Точна модель етикетки в загальному випадку являє собою прямокутник з відповідними розмірами ( $A \times B$ ) і вписаним у нього рисунком також у формі пря-

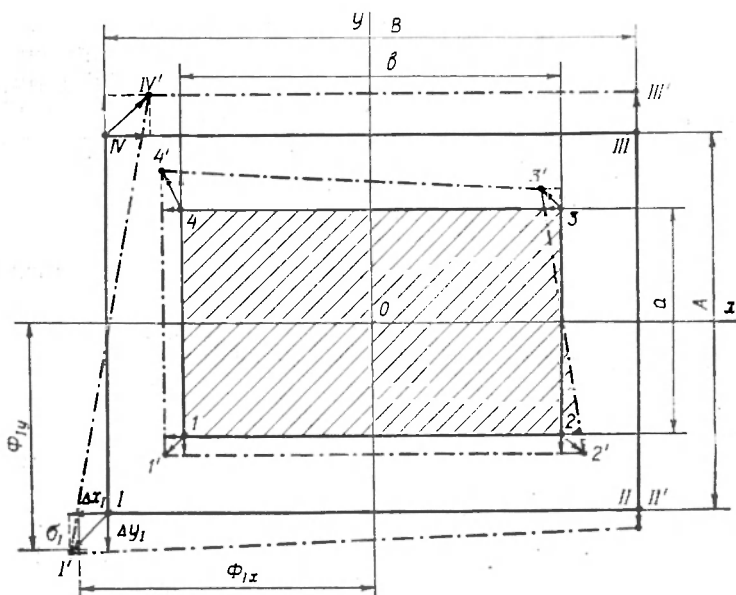


Рис. 1. Геометрична форма етикетки.

мокутника з розмірами ( $a \times b$ ). Характерними точками прямокутників (рис. 1) є відповідно точки  $I, II, III, IV$  для етикетки та  $1, 2, 3, 4$  для рисунка етикетки, які умовно назвемо вузлами, та точка перетину діагоналей  $O$  (центр симетрії), яку приймемо за початок координат.

Під час виготовлення етикетки можливі зміщення вузлів. Зміщення у вузлі  $I$  має два компоненти, які в матричному записі мають вигляд

$$\{\sigma_1\} = \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

та всі шістнадцять компонентів зміщень етикетки позначені як

$$\{\sigma\}^e = \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ \sigma_{IV} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Форма реальної етикетки (рисунка) не збігається з ідеальною і є чотирикутником зі сторонами, зміщеними по відношенню до ідеальної. Точка краю етикетки з координатами  $(x, y)$  зміщується в точку з новими координатами  $(\varphi_x, \varphi_y)$ . Для точок з відрізків, паралельних осі абсцис, прийнемо  $\varphi_x = x$ , а  $\varphi_y$  обчислюємо з інтерполяційного полінома

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy. \quad (3)$$

Для ідеальної (точної) етикетки у вузлах виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} \text{для вузла I} \quad \varphi &= \Phi_I \quad \text{при} \quad x = -\frac{B}{2}, \quad y = -\frac{A}{2}; \\ \text{для вузла II} \quad \varphi &= \Phi_{II} \quad \text{при} \quad x = \frac{B}{2}, \quad y = -\frac{A}{2}; \\ \text{для вузла III} \quad \varphi &= \Phi_{III} \quad \text{при} \quad x = \frac{B}{2}, \quad y = \frac{A}{2}; \\ \text{для вузла IV} \quad \varphi &= \Phi_{IV} \quad \text{при} \quad x = -\frac{B}{2}, \quad y = \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставляючи вирази (4) в формулу (3), одержуємо систему рівнянь, які розв'язуємо відносно незалежних коефіцієнтів  $\alpha_i$  ( $i = 1, 4$ ). Тепер після підстановки виразів  $\alpha_i$  в (3) запишемо інтерполяційний поліном у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{AB} \left[ \Phi_I \left( \frac{B}{2} - x \right) \left( \frac{A}{2} - y \right) + \Phi_{II} \left( \frac{B}{2} + x \right) \left( \frac{A}{2} - y \right) + \right. \\ \left. + \Phi_{III} \left( \frac{B}{2} + x \right) \left( \frac{A}{2} + y \right) + \Phi_{IV} \left( \frac{B}{2} - x \right) \left( \frac{A}{2} + y \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для визначення  $\varphi_y$  у формулу (5) підставляємо значення координат зміщення характерних точок етикетки по осі ординат

$\Phi_{IVy}$ — $\Phi_{IVy}$ . Аналогічно зміщення точок країв етикетки, паралельних осі ординат  $\varphi_x$  (при  $\varphi_y=y$ ), знаходимо з цієї ж формули, підставивши в неї значення координат зміщення характерних точок етикетки по осі абсцис  $\Phi_{Ix}$ — $\Phi_{IVx}$ .

Технологічний процес виготовлення етикетки включає в себе багато різноманітних операцій, кожна з яких вносить похибки. Оскільки відсутня можливість коректування похибок, створених на попередніх операціях, основним способом керування точністю є мінімізація похибок на кожній технологічній операції  $k$

$$\sigma_k^e \rightarrow \min. \quad (6)$$

**Математична модель точності етикетки.** Згідно з технічними умовами (ТУ), для оцінки точності етикетки використовують три показники: похибки розмірів етикетки  $x_1$ , відстані від лінії контура  $x_2$  і косина  $x_3$ .

Математичну модель точності етикетки можна зобразити вектором  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$  в однорідному евклідовому просторі  $R$  з нормою

$$\|\mathbf{x}\| = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Множина  $\omega$  векторів  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_j\}$  простору  $R$  визначає область точності виготовлення етикеток.

Критеріальні умови допусків на точність типу рівності  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$  створюють у просторі  $R$  поверхні обмеження. Тоді умови типу  $x_{0i} \leq x_j \leq x_{0j}$  створюють область  $\bar{\kappa} \subset \bar{\kappa}$  в формі паралелепіпеда, обмеженого вказаними поверхнями (рис. 2), які будемо називати підобластю області точності етикеток, що відповідають ГОСТу або ТУ. Складовими  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  прийняті відповідно допуски на розмір етикетки, відстань від лінії контура та косина.

**Математична модель технологічного процесу виготовлення етикеток з прогнозованою точністю.** Залежно від технологічного процесу етикетна продукція обробляється в таких трьох позиціях: у формі окремої етикетки; в формі множини етикеток, розміщених на обмеженій площині — друкованому аркуші, та множини етикеток, розташованих в обмеженому просторі (стопі). Таким чином, загальну похибку відстані від лінії контура окремої етикетки можна розглядати як функцію від трьох принципово різних за своєю природою типів похибок

$$\varepsilon = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad (8)$$

де  $\varepsilon_1$  — похибка розмірів рисунка етикетки;  $\varepsilon_2$  — похибка розміщення рисунка окремої етикетки на аркуші;  $\varepsilon_3$  — похибка розміщення рисунка вказаної етикетки в стопі.

Похибку  $\epsilon_3$ , яка виникає при обробці стопи на одноножових паперорізальних машинах, можна розділити на постійну  $\epsilon_{II}$  (похибка позиціонування стопи) та змінну  $\epsilon_{3M}$  складові:

$$\epsilon_3 = \epsilon_{II} + \epsilon_{3M}. \quad (9)$$

У таблиці показані типи похибок, які виникають на окремих технологічних операціях виготовлення етикетної продукції способом офсетного друку.

Типи похибок, які виникають на окремих технологічних операціях виготовлення етикетної продукції способом офсетного друку

| Технологічні операції  | По-<br>хибка<br>$\epsilon_4$ | По-<br>хибка<br>$\epsilon_5$ | Похибка $\epsilon_3$ |                 |
|--|------------------------------|------------------------------|----------------------|-----------------|
|  |                              |                              | $\epsilon_{II}$      | $\epsilon_{3M}$ |
| Виготовлення фотоформ негативів (позитивів)                    | +                            | -                            | -                    | -               |
| Монтаж негативів (позитивів) та їх зберігання                  | +                            | +                            | -                    | -               |
| Виготовлення друкованих форм та їх зберігання                  | +                            | +                            | -                    | -               |
| Друкування тиражу  | +                            | +                            | -                    | -               |
| Зіштовхування стопи, її автоматичне позиціонування та розрізка | +                            | -                            | +                    | +               |

Стопу, яка розрізається на паперорізальній машині, в ідеальному випадку можна зобразити як паралелепіпед, в якому етикетки розташовані подібно до просторової ґратки (рис. 3), або як множину характерних точок етикеток, в якій кожна етикетка займає визначене місце. Оскільки етикетки розміщені на окремих

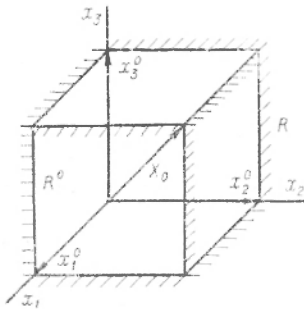


Рис. 2. Підобласть області точності етикеток.

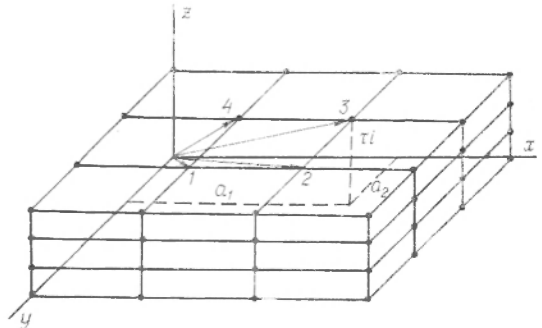


Рис. 3. Геометрична форма (макет) стопи.

листах, то стопа розбивається на скінченну множину листів  $W^0 = \bigcup_{i=1}^n S_i^0$ . А кожен лист  $S_i^0$  в даній множині складається з множин етикеток

$$S_i^0 = \{e_1^{i0}, e_2^{i0}, e_3^{i0}, \dots, e_r^{i0}\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (10)$$

де  $r$  — кількість етикеток на листі;  $n$  — кількість листів у стопі.

Кожна етикетка в стопі визначається чотирма векторами. Норма вектора для точки  $z$  етикетки, згідно з рис. 3, визначається як

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + (\tau i)^2}, \quad (11)$$

де  $\tau$  — товщина листа;  $i$  — кількість листів, рахуючи знизу.

У реальній стопі розміщення етикеток значно відрізняється від наведеної математичної моделі. Позначимо множину реальних етикеток у стопі через  $U$ . Нехай  $\varphi(e)$  — функція, яка кожній етикетці даної стопи ставить у співвідношення її похибку розміщення, тобто  $\varphi(e_j) = x_k$ . Область визначення  $\varphi \in U$  з множиною значень  $\theta = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ . Нехай  $U = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$  та  $\varphi(e_1) = -0,2$  мм,  $\varphi(e_2) = 0$  мм,  $\varphi(e_3) = 0,3$  мм,  $\varphi(e_4) = -0,2$  мм,  $\varphi(e_5) = 0,4$  мм,  $\varphi(e_6) = 0,3$  мм. Тоді множина значень  $\theta$  складається з чотирьох елементів  $\{0, -0,2, 0,3, 0,4\}$ . В ідеальному випадку, коли похибки немає,  $\theta = \{0\}$ .

Технологічні умови задають на  $\theta$  обмеження у вигляді допусків. Тоді множина  $U$  розбивається на множину  $K^+$  етикеток, що задовольняють допуск, та множину  $K^-$  бракованих етикеток, тобто  $U = K^+ \cup K^-$ . Якщо позначити через  $w^+$  (або  $w^-$ ) кількість етикеток в множині  $K^+$  (відповідно в  $K^-$ ), то якість (точність) розміщення етикеток в стопі можна оцінити коефіцієнтом якості

$$k = \frac{w^+}{w^+ + w^-}. \quad (12)$$

This paper analyses a mathematical model of a label, sums up precision indicators of label preparation, possible sources of manufacturing errors, as well as specifies ways of evaluating correctness of label piling.

Стаття надійшла до редколегії 10. 04. 84