УДК 678.067.5

Я. М. КАВИН

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ СТРІЧКОВІДНОЇ ДІЛЯНКИ З ПРУЖИННИМ АМОРТИЗАТОРОМ

Якість газетної та книжково-журнальної продукції, яка друкується на рулонних ротаційних машинах, продуктивність самих машин значною мірою залежить від стабільності натягу паперової стрічки. Найбільші коливання натягу відбуваються при розмотуванні стрічки з рулону. Аналіз стрічковід-

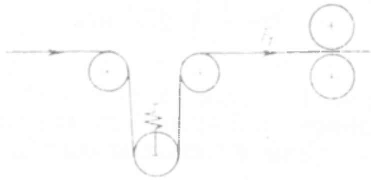

Рис. 1. Функціональна схема спрощеної моделі системи ділянки паперової стрічки з пружинним амортизатором.

ної ділянки з пружинним амортизатором ведуть за простими динамічними моделями [1], які не повною мірою відображають процеси, що там відбуваються.

Розглянемо стрічковідну ділянку з пружинним амортизатором, схема якої приведена на рис. 1.

Стрічковідна ділянка описується відомим рівнянням [3]

$$T\frac{dF_1}{dt} + F_1 = K\Delta V, \qquad (1)$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 + \Delta V_2,$$

де K — коефіцієнт передачі стрічки; T — стала часу ділянки паперової стрічки; V_1 і V_2 — лінійні швидкості відповідно на початку та в кінці ділянки; ΔV_2 — приріст швидкості стрічки, обумовлений рухом пружинного амортизатора (швидкість амортизатора); F_1 — сила натягу стрічки.

Рівняння руху пружинного амортизатора

$$m\frac{d\Delta V_2}{dt} = F_1 - F_2 - F_3 - F_{пр}, \qquad (2)$$

де m — маса амортизатора; $F_{пр}$ — сила пружини.
Силу тертя вважаємо пропорційною швидкості стрічки

$$F_т = \alpha \Delta V_2, \tag{3}$$

де α — коефіцієнт, який враховує силу тертя у механічній частині амортизатора.
Сила пружини амортизатора

$$F = c \cdot l, \tag{4}$$

де c — жорсткість пружини амортизатора; l — довжина паперової стрічки до і після амортизатора.
Переміщення амортизатора

$$l = \frac{1}{2} \int \Delta V_2 \, dt. \tag{5}$$

На основі схеми (рис. 1) і рівнянь (1÷5) на рис. 2 побудована структурна схема динамічної моделі ділянки стрічки з пружинним амортизатором, який є основою для аналізу та синтезу системи.

На основі структурної схеми (рис. 2) запишемо залежність сили натягу паперової стрічки F_1 від зміни швидкості стрічки до її проходження через амортизатор ΔV_1

$$F_1(s) = \frac{\dfrac{2c}{2s(ms+\alpha)} \, \dfrac{K}{Ts+1}}{1 + \dfrac{2c}{2s(ms+\alpha)} + \dfrac{K}{(ms+\alpha)(Ts+1)}} \Delta V_1(s). \tag{6}$$

Після перетворень

$$F_1(s) = \frac{cK}{mTs^3 + (m + \alpha T) s^2 + (\alpha + cT + K) s + c} \Delta V_1(s).$$

Прийнявши оператор s, рівний нулеві, визначимо статичний коефіцієнт передачі за зміною швидкості

$$\frac{F_1}{\Delta V_1} = K. \tag{7}$$

Отже, статичний коефіцієнт передачі системи за зміною швидкості дорівнює коефіцієнту передачі стрічки.

Запишемо залежність сили натягу стрічки F_1 від зміни швидкості ΔV_2

$$F_1(s) = \frac{\frac{K}{Ts+1}\left(1 + \frac{c}{2s}\frac{2}{ms+\alpha}\right)}{1 + \frac{c}{2s}\frac{2}{ms+\alpha} + \frac{2}{ms+\alpha}\frac{K}{Ts+1}}\Delta V_2(s). \qquad (8)$$

Після перетворень

$$F_1(s) = \frac{Kms^2 + K\alpha s + kc}{mTs^3 + (m + T\alpha)s^2 + (\alpha + Tc + 2k)s + c}\Delta V_2(s).$$

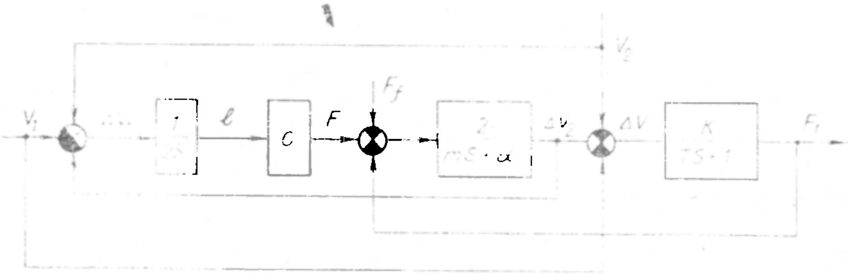

Рис. 2. Структурна схема спрощеної моделі ділянки паперової стрічки з пружинним амортизатором.

Аналогічно, прийнявши оператор s, рівний нулеві, визначимо статичний коефіцієнт передачі за зміною швидкості ΔV_2

$$\frac{F_1}{\Delta V_2} = K. \qquad (9)$$

Як бачимо, і в цьому випадку статичний коефіцієнт передачі за зміною швидкості ΔV_2 дорівнює коефіцієнту передачі стрічки. Таким чином, статичне відхилення сили натягу і в одному, і в другому випадках залежить від швидкості стрічки.

Розглянемо випадок, коли на систему діє збурення F_f. Запишемо залежність сили натягу стрічки F від збурення F_f

$$F_1(s) = \frac{\frac{2}{ms+\alpha}\frac{K}{Ts+1}}{1 + \frac{2}{2s(ms+\alpha)} + \frac{2K}{(ms+\alpha)(Ts+1)}}F_f(s). \qquad (10)$$

Після перетворень

$$F_1(s) = \frac{2Ks}{mTs^3 + (m + T\alpha)s^2 + (\alpha + Tc + 2K)s + c}F_f(s).$$

Прийнявши оператор s, рівний нулеві, визначимо статичний коефіцієнт за збуренням.

$$\frac{F_1}{F_f} = 0. \tag{11}$$

Отже, можна зробити висновок, що при дії на систему збурення жодного статичного відхилення немає, тобто система астатична.

Тепер розглянемо залежність сили пружини F, прикладеної до амортизатора, від зміни швидкості ΔV_1

$$F(s) = \frac{\frac{c}{2s}\left(1 + \frac{2}{ms+\alpha}\frac{K}{Ts+1}\right)}{1 + \frac{2c}{2s(ms+\alpha)} + \frac{2}{ms+\alpha}\frac{K}{Ts+1}} \Delta V_1(s). \tag{12}$$

Після перетворень

$$F(s) = \frac{cmTs^2 + (cm + c\alpha T)s + s\alpha + cK}{2mTs^3 + 2(m+\alpha T)s^2 + 2(\alpha + cT + K)s + 2c} \Delta V_1(s). \tag{13}$$

Прийнявши оператор s, рівний нулеві, визначимо статичний коефіцієнт за зміною швидкості ΔV_1

$$\frac{F}{\Delta V_1} = \frac{\alpha + K}{2}. \tag{14}$$

Таким чином, статичне відхилення сили пружини F, викликане зміною швидкості ΔV_1, визначається коефіцієнтом передачі стрічки K та коефіцієнтом сили тертя α.

При різних змінних сили натягу паперової стрічки пружинний амортизатор здійснює коливний рух, внаслідок чого відбувається затухання коливань натягу стрічки. Проведемо аналіз власних коливань у стрічковідній системі з пружинним амортизатором. Для цього з (13) запишемо характеристичне рівняння системи

$$2mTs^3 + 2(m + \alpha T)s^2 + (\alpha + Tc + K)s + 2c = 0. \tag{15}$$

Після перетворень приведемо рівняння до нормованої форми запису

$$s^3 + \frac{m+\alpha T}{mT}s^2 + \frac{\alpha + Tc + K}{mT}s + \frac{c}{mT} = 0. \tag{16}$$

Прийнявши

$$A=\frac{m+\alpha T}{mT}; \quad B=\frac{\alpha+Tc+K}{mT}; \quad D=\frac{c}{mT},$$

рівняння (16) набуде вигляду

$$s^3+As^2+Bs+D=0. \tag{17}$$

Рівняння системи можна виразити в безрозмірній часу

$$\tau=t\omega_0,$$

де ω_0 — власна частота коливань [4].
Безрозмірному часові τ відповідає безрозмірний параметр p, який зв'язаний з оператором s співвідношенням

$$s=p\cdot\tau. \tag{18}$$

Отже, якщо підставити (18) в (17) і зробити відповідні перетворення, получимо характеристичне рівняння у формі Вишнеградського [2]

$$p^3+Ap^2+Bp+1=0. \tag{19}$$

Застосовуючи критерій стійкості Гурвіца, знайдемо умову стійкості системи

$$AB>1. \tag{20}$$

У вихідних параметрах умова стійкості набуде вигляду

$$\frac{m+\alpha T}{mT}\cdot\frac{\alpha+Tc+K}{mT}>1.$$

При виконанні нерівності (20) дана система являється стійкою. Коли

$$AB=1, \tag{21}$$

у вихідних параметрах

$$\frac{m+\alpha T}{mT}\cdot\frac{\alpha+Tc+K}{mT}=1, \tag{22}$$

то система знаходиться на границі стійкості. Вираз (22) можна розглядати як рівняння кривої (гіперболи), яка розбиває площину з координатами A і B на дві області — стійкості і нестійкості. На діаграмі Вишнеградського область стійкості даної системи знаходиться у площині абв (рис. 3). У цій області перехідна функція даної системи аперіодична і монотонна, тобто амортизатор з ділянкою стрічки має аперіодичний перехідний процес. На основі діаграми Вишнеградського можна побудувати графік залежності жорсткості пружини амортизатора c від сталої часу паперової стрічки I. Знехтувавши коефіцієнтом тертя α, запишемо

$$A = \frac{1}{T}; \quad B = \frac{Tc + K}{mT}. \tag{23}$$

Звідси

$$c = Bm = \frac{K}{T}.$$

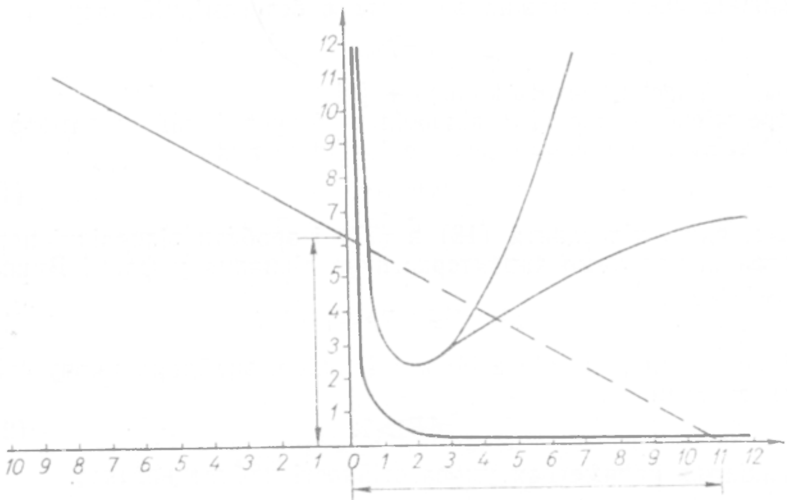

Рис. 3. Графік залежності сталої часу паперової стрічки від жорсткості пружини амортизатора.

Це рівняння прямої лінії, яку нанесено на рис. 3. На основі такого графіка із співвідношення (23) від безрозмірної залежності можна перейти до залежності фізичних змінних, сталої часу ділянки паперової стрічки T і жорсткості пружини амортизатора c.

Таким чином, отримали залежність жорсткості пружини амортизатора c від сталої часу ділянки паперової стрічки T, при якій перехідний процес у системі матиме аперіодичний характер. Якщо задана ділянка стрічки зі сталою часу T, то за допомогою графіка (рис. 3) можна знайти жорсткість пружини амортизатора c, при якій відсутній коливний перехідний процес у системі.

1. *Казакевич В. В., Избицкий Э. И.* Системы автоматического управления полиграфическими процессами. М., 1978. 2. *Красовский А. А., Поспелов Г. С.* Основы автоматики и технической кибернетики. М.; Л. 1962. 3. *Луцків М. М., Дурняк Б. В., Волощак І. А.* Аналіз спрощених моделей

систем натягу паперової стрічки // Поліграфія і видавнича справа. 1983. № 19.
4. Теория автоматического управления / Под ред. А. В. Нетушила. М., 1968. Ч. 1.

Стаття надійшла до редколегії 25.12.89