

І.М.Павлюк, П.Л.Пашуля, Б.І.Листвак

ТРИВИМІРНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ В ТЕХНОЛОГІЇ ВИГОТОВЛЕННЯ ДРУКАРСЬКИХ ФОРМ

В літературі описаний розв'язок ряду задач масопереносу при беземульсійному травленні друкарських форм асимптотично-аналітичним методом [3]. На нашу думку, застосування чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів, дозволяє значно розширити клас задач масопереносу при формуванні пробільних ділянок довільної конфігурації.

Розглянемо задачу в загальній постановці. На рис. 1 зображено частину широко розповсюдженого пробільного елемента V , який в перерізі є трапецією.

Перебіг гетерогенного процесу в дифузійній області при стаціонарних умовах описується рівнянням [2]

$$\frac{\partial C}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

з граничними умовами $C = C_0$ на S_1 (2)

$$i \frac{\partial C}{\partial n} + pC + q = 0 \text{ на } S_2, \quad (3)$$

де D_x, D_y, D_z - коефіцієнти дифузії субстанта масопереносу (СМ) по відповідних осях; C - концентрація субстанта, масоперенос якого розглядається; C_0 - його початкова концентрація на межі області S_1 ; n - внутрішня нормаль до межі області S_2 ; p, q - функції координат часу і такі, що враховують фізико-хімічні зміни на межі S_2 .

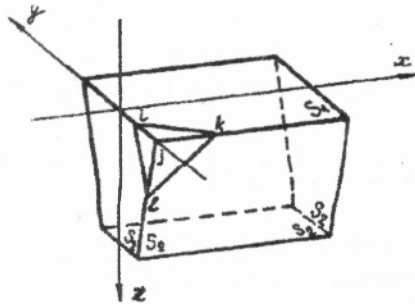


Рис. 1. Трапецієвидний пробільний елемент.

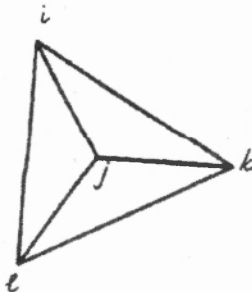


Рис. 2. Елементарний тетраедр.

Тіло призматичної форми можна подати як суму скінченного числа тетраедрів (рис. 2) з вершинами у вузлах i, j, k, l . Площина (i, j, k) є складовою частиною S_1 , а площини (i, l, j) та (i, l, k) належать S_2 . На площині (i, l, k) виконуються умови спряження.

З варіаційного числення задача мінімізації функціонала (1)

$$\Phi = \iiint_V \left[\frac{D_x}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 + \frac{D_y}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)^2 + \frac{D_z}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iint_S \left(qC + \frac{1}{2} pC^2 \right) dS, \quad (4)$$

де $S = S_1 + S_2$ еквівалентна рівнянню (1) з граничними умовами (2), (3).

Мінімізацію функціонала (4) здійснимо у вершинах тетраедрів, на які розіб'ємо область V . Введемо дві матриці: матрицю-рядок градієнтів концентрацій

$$\{g\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5)$$

і діагональну матрицю

$$D = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Тоді функціонал (4) можна подати у вигляді

$$\Phi = \iiint_V \frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} dV + \iint_S \left(qC + \frac{1}{2} pC^2 \right) dS, \quad (7)$$

Для елементарного об'єму $V(e)$ функціонал матиме індекси (e) для кожного підінтегрального виразу. Виконання умов неперервності лінійних форм тетрадральних симплекс елементів дозволяє подати його у вигляді суми

$$\Phi = \sum_{e=1}^E \Phi_e \quad (8)$$

де $e=1, 2, 3, \dots, E$; E - кількість елементів.

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{e=1}^E \left[\iiint_{V(e)} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} dV + \right. \\ \left. + \iint_{S(e)} \left(q^{(e)} c^{(e)} + \frac{1}{2} p^{(e)} c^{(e)} c^{(e)} \right) dS \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Умовою мінімізації функціонала (9) є виконання рівності

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{c\}} = \frac{\partial}{\partial \{c\}} \sum_{e=1}^E \Phi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial \{c\}} = 0. \quad (10)$$

Концентрація CM в елементарному об'ємі виражається добутком матриці функції форми і матриці невідомих вузлових значень $\{C\}$

$$C^{(e)} = [N^{(e)}] \{C\} \quad (11)$$

Знайдемо нетранспоновану матрицю градієнтів концентрації $\{g^{(e)}\}$ з урахуванням (11)

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial C^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial C^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial C^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Позначивши матрицю з частинних похідних від функцій форми через $[B^{(e)}]$, (12) можна подати як

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{C\} \quad (13)$$

Функціонал для тетраедрального елемента з урахуванням (11) і (13) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Phi^{(e)} = & \iiint_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{c\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{c\} dV + \\ & + \iint_{S^{(e)}} (q^{(e)} [N^{(e)}] \{c\} + \frac{1}{2} p^{(e)} \{c\}^T [N^{(e)}] \{c\}) dS. \quad (14) \end{aligned}$$

Реалізація на ЕОМ (14), (7) без урахування (10) малоефективна. Знайдемо частинні похідні для вузлових значень концентрацій СМ від кожного з інтегралів функціонала (14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{c\}} \iiint_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{c\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{c\} dV = \\ = \iiint_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{c\} dV, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{c\}} \iint_{S^{(e)}} (q^{(e)} [N^{(e)}] \{c\} + \frac{1}{2} p^{(e)} \{c\}^T [N^{(e)}] \{c\}) dS = \\ = \iint_{S^{(e)}} (q^{(e)} [N^{(e)}]^T + p^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{c\}) dS. \quad (16) \end{aligned}$$

З метою поліпшення інформаційності з (15) і (16) утворимо вирази

$$[m^{(e)}] = \iiint_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] dV + \iint_{S^{(e)}} p^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS, \quad (17)$$

$$\{f^{(e)}\} = \iint_{S^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T dS, \quad (18)$$

Співвідношення (17) є матрицею масопереносу субстанта елементарного тетраедра, а (18) - матрицею впливу фізико-хімічних умов на межі S_2 .

З урахуванням (17) і (18) вираз (10) запишеться так

$$\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial \{c\}} = \sum_{e=1}^E ([m^{(e)}] \{c\} + \{f^{(e)}\}) = 0. \quad (19)$$

Розв'язок системи рівнянь (19) відносно $\{c\}$ і є розв'язком рівняння (1) з граничними умовами (2), (3).

Для растрових та вузьких штрихових пробільних елементів задача спрощується, оскільки її можна розглядати як двовимірну. При цьому переслідувалась мета - встановити розподіл концентрації захисної домішки в часі і просторі пробільного елемента, і при заданому розподілі знайти залежність між співвідношенням $h/1$ та профільним кутом друкуючих елементів.

Перевірка розв'язку двовимірної задачі здійснювалась нами у виробничих умовах (видавництво "Вільна Україна") на травильній машині ФТ-50 Н стандартному травильному розчині при різних режимах травлення.

Встановлено, що при співвідношенні $h/1^*$ у межах від 0,15 до 0,45 оптимальною для подачі травильного розчину є швидкість, яка відповідає числу обертів ротора насоса, рівному 1250 хв^{-1} . Ця швидкість, до речі використовується на практиці. При цьому профільний кут при вершині друкуючих елементів був у межах від 105 до 130° , що задовільняє вимоги технологічних інструкцій.

При інших співвідношеннях $h/1$ розрахункова швидкість подачі травильного розчину не збігається з практичною, що можливо, потребує зміни гідродинаміки зі зміною глибини травлення.

1. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М. 1975. 2. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М. 1959. 3. Наумов В.А. Двумерная математическая модель процесса травления штриховых печатных форм с учетом адсор-

* $h/1$ - співвідношення глибини пробільного елемента до його ширини.

бции ингибиторов // Технология полиграфии: Физико-химические проблемы. М. 1991. С. 4-26.

Стаття надійшла до редколегії 15.0193.