УДК 625.282

М.М.Луцків, В.Д.Стасенко

ПОБУДОВА ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ШЕСТИПОЛЮСНИХ КОМПОНЕНТАХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Вивчення динамічних процесів в машинах і створення методів розрахунку машин з врахуванням діючих динамічних навантажень і пружних зв'язків мають особливу вартість при збільшенні швидкості сучасних машин та підвищенні їх продуктивності. Широкий розвиток ЕОМ значно полегшує розв'язок задач динаміки.

Традиційно механічну систему з пружними зв'язками описують системою диференційних рівнянь або структурною схемою, яка складається з елементарних двополюсних елементів (ланок) та зв'язків між ними [2, с. 30]. Для багатомасових механічних систем з пружними зв'язками структурні схеми мають багато прямих, зворотніх та перехресних зв'язків, які роблять схему громіздкою і малопридатною для розрахунку на ЕОМ.

Методи дослідження динаміки машин на ЕОМ повинні враховувати специфіку механічних систем з пружними зв'язками і бути доступними для інженерної практики. В роботі розглянуті методи багатополюсних компонентів для опису механічних систем з пружними компонентами [3, с. 398].

Багатомасова механічна система складається із обертових мас, з'єднаних пружними валоприводами. На таку систему діють моменти різних сил, які прикладені до обертових мас. Шестиполюсний компонент механічної системи описує частину системи, яка включає обертову масу, що з'єднана з попередньою обертовою масою пружним валопроводом. На обертову масу діють моменти пружного зв'язку, момент сил вязкого тертя та моменти сил навантаження і сил опору.

В загальному випадку, незалежно від прийнятих для опису вхідних та вихідних змінних, шестиполюсний компонент механічної системи можна описати системою рівнянь в операторній формі запису.

$$
\begin{aligned}
Y_1(s) &= W_{11}(s)\,X_1(s) + W_{12}(s)\,X_2(s) + W_{13}(s)\,X_3(s)\\
Y_2(s) &= W_{21}(s)\,X_1(s) + W_{22}(s)\,X_2(s) + W_{23}(s)\,X_3(s) \qquad (1)\\
Y_3(s) &= W_{31}(s)\,X_1(s) + W_{32}(s)\,X_2(s) + W_{33}(s)\,X_3(s)
\end{aligned}
$$

де $W_{ij}(s)$ - оператори компонента,

$Y_i(s)$, $X_i(s)$ - зображення відповідно вихідних та вхідних змінних компонента.

Переходячи до матричної форми запису, і для спрощення запису опустивши оператор s, із (1) отримаємо матричне рівняння компонента в операторній формі запису.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Або в компонентній формі запису

$$Y = [W_k]\, X, \quad (3)$$

де Y, X - вектори зображення вихідних і вхідних змінних,

$[W_k]$ - матрична передаточна функція компонента.

Для динаміки машини важливою є побудова перехідних процесів компонентів механічної системи з пружними зв'язками. Вираз (3) є операторною формою запису матричного диференційного рівняння компонента. Тому розв'язок диференційного рівняння (3) при нульових початкових умовах [3, с. 332]

$$Y(t) = \Phi(t)\, X(t), \quad (4)$$

де $\Phi(t)$ - фундаментальна матриця розв'язків (перехідна матриця компонента).

Для розв'язку (4) потрібно визначити перехідну матрицю. Відомі різні методи визначення перехідної матриці. Якщо відома матрична передаточна функція компонента, то найпростіше матричну передаточну функцію визначити як зворотнє перетворення Лапласа матричної передаточної функції [3, с. 333]:

$$\Phi(t) = L^{-1}\, [W]. \quad (5)$$

Якщо компонент описується матричною передаточною функцією, то перехідна матриця компонента

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

елементи перехідної матриці

$$f_{ij}(t) = L^{-1}\, W_{ii}(s), \quad (7)$$

де $L^{-1}\, W_{ij}(s)$ - зворотнє перетворення Лапласа передаточної функції W (s).

Елемент перехідної матриці $f_{ij}(t)$ можна розглядати як перехідну функцію, що описує реакцію вихідної змінної у компонента на дію вхідної змінної x_i.

Розв'язок матричного диференційного рівняння компонента в розгорнутому вигляді

$$\begin{bmatrix} Y_{11}(t) \\ Y_{21}(t) \\ Y_{31}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{31}(t) \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Конкретизуємо задачу. Розглянемо багатополюсний компонент механічної системи, схема якої наведена на рис. 1.

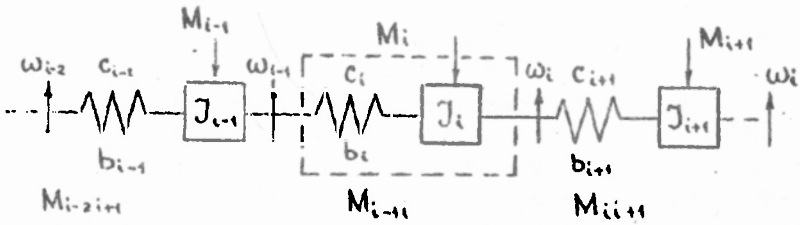

Рис. 1. Схема механічної системи з пружними зв'язками.

Компонент описує одномасову систему з пружним елементом та в'язким тертям. Рівняння руху механічного компонента

$$I_i \frac{dw_i}{dt} = M_{i-1,\,i} + M_{i,\,i+1} - M_i - M_{iT}, \qquad (9)$$

де I_i - момент інерції і-тої обертової маси, w_i - кутова швидкість маси, M_{i-1} та $M_{i,\,i+1}$ - моменти, які виникають в пружних елементах, приєднаних до цієї маси, M_i - сумарний момент навантаження, M_{iT} - момент зовнішніх сил тертя, які прикладені до маси.

Момент який виникає в пружному елементі, складається із двох складових. Перша складова - це момент пружного зв'язку, який виникає внаслідок деформації пружного елемента i є пропорційний куту закручування або різниці кутів повороту окремих мас, які є інтегралом від різниці швидкостей [1, с. 41]

$$M_{ic} = c_i\,(w_{i-1} - w_i)\,dt. \qquad (10)$$

де c_i - жорсткість пружного зв'язку компонента.

Друга складова - це момент внутрішнього в'язкого тертя в пружному елементі, пропорційний різниці швидкостей [1, с. 41]

$$M_{ib} = b_i\,(w_{i-1} - w_i), \qquad (11)$$

де b_i - коефіцієнт пропорційності.

Сумуючи ці складові, отримаємо момент в пружному елементі компонента

$$M_{i-1,\,i} = c_i \int (w_i - w_i)\,dt + b_i\,(w_i - w_i). \qquad (12)$$

Сили і момент зовнішніх сил тертя приймаємо лінійнозалежними від швидкостей

$$M_{id} = d_i\,w_i, \qquad (13)$$

дс d_i - коефіцієнт пропорційності.

Переходячи до операторної форми запису (9-13) і розв'язавши рівняння відносно відповідних змінннних, отримаємо

$$w_i = \frac{1}{I_i s} \int \left(M_{i-1,\,i} - M_{i,\,i+1} - M_i - M_{id}\right). \tag{14}$$

$$M_{i-1,\,i} = \frac{b_i s + c_i}{s} (w_{i-1} - w_i), \tag{15}$$

$$M_{ic} = \frac{c_i}{s} (w_{i-1} - w_i), \tag{16}$$

Прийнявши за вихідні змінні w_i , $M_{i-1,\,i}$ та M_{ic}, а за вхідні змінні w_{i-1} , $M_{i,\,i+1}$ та M_i , після перетворень отримаємо систему рівнянь

$$w_i = \left[\frac{b_i s + c_i}{(I_i s + d_i)s} w_{i-1} - \frac{1}{I_i s + d_i} M_{i,\,i+1} - \frac{1}{I_i s + d_i} M_i\right] \Delta^{-1}(s),$$

$$M_{i-1,\,i} = \left[\frac{b_i s + c_i}{s} w_{i-1} + \frac{b_i s + c_i}{(I_i s + d_i)s} M_{i,\,i+1} + ,\right.$$
$$\left. + \frac{b_i s + c_i}{(I_i s + d_i)s} M_i\right] \Delta^{-1}(s), \tag{17}$$

$$M_{ic} = \left[\frac{c_i}{s} w_i + \frac{c_i}{(I_i s + d_i)s} M_{i,\,i+1} + \frac{c_i}{(I_i s + d_i)s} M_i\right] \Delta^{-1}(s)$$

де визначник шестиполюсного компонента

$$\Delta(s) = \frac{(I_i s + a_i)s + b_i s + c_i}{(I_i s + d_i)s}. \tag{18}$$

Після перетворень (17), отримаємо матричне рівняння шестиполюсного компонента механічної системи з пружними зв'язками

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ M_{i-1} \\ M_{ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_i s + c_i}{B(s)} & -\dfrac{s}{B(s)} & -\dfrac{s}{B(s)} \\ \dfrac{(b_i s + c_i)(I_i s + d_i)}{B(s)} & \dfrac{b_i s + c_i}{B(s)} & \dfrac{b_i s + c_i}{B(s)} \\ \dfrac{c_i (I_i s + d_i)}{B(s)} & \dfrac{c_i}{B(s)} & \dfrac{c_i}{B(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i-1} \\ M_{i,\,i+1} \\ M_i \end{bmatrix} \tag{19}$$

де власний оператор компонента

$$B(s) = I_i s^2 + (d_i + b_i)s + c_i. \tag{20}$$

Із (19) запишемо матричну перехідну функцію компонента

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} L^{-1}\dfrac{b_i s + c_i}{B(s)} & -L^{-1}\dfrac{s}{B(s)} & -L^{-1}\dfrac{s}{B(s)} \\ L^{-1}\dfrac{(b_i s + c_i)(I_i s + d_i)}{B(s)} & -L\dfrac{b_i s + c_i}{B(s)} & L^{-1}\dfrac{b_i s + c_i}{B(s)} \\ L^{-1}\dfrac{c_i (I_i s + d_i)}{B(s)} & L^{-1}\dfrac{c_i}{B(s)} & L^{-1}\dfrac{c_i}{B(s)} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Використовуючи таблиці зворотнього перетворення Лапласа із (21) визначимо елементи перехідної функції $f_{ij}(t)$. Матрична перехідна функція компонента буде аналогічна (6). Тоді розв'язок матричного диференційного рівняння шестиполюсного компонента механічної системи з пружними зв'язками

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ M(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i-1}(t) \\ M_{i,\,i+1}(t) \\ M_i(t) \end{bmatrix} \tag{22}$$

Змінюючи i від 1 до n, можна отримати загальну систему матричних рівнянь n - масної механічної системи з пружними зв'язками.

Компонент механічної системи можна представити у вигляді прямокутника з трьома входами і виходами. Тоді механічну систему з пружними зв'язками рис. 1 на основі рівняння (19) можна представити у вигляді матричної структурної схеми, яка складається із компонентів та зв'язків між ними (рис. 2).

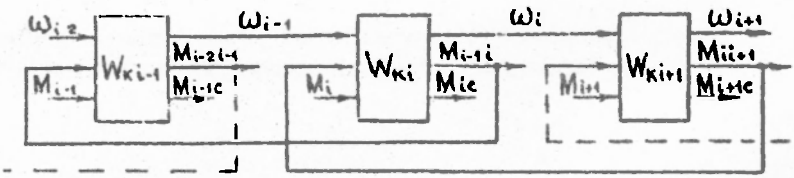

Рис. 2. Матрична структурна схема механічної системи.

Запропонований опис механічної системи з пружними зв'язками за допомогою шестиполюсного компонента є формалізований, представлений в матричній формі, тому є зручний для обчислень на ЕОМ.

Для спрощення дослідження динаміки механічних систем з пружними зв'язками зручно використати отримані розв'зки рівнянь компонентів і метод цифроаналогового моделювання за структурною схемою рис. 2. При цьому в 4-5 разів зменшується число елементів та зв'язків, які є в традиційних схемах [2, с. 37], що спрощує опис системи та розробку програмного забезпечення. Таким чином, опис механічної системи за допомогою шестиполюсних компонентів є ефективним при дослідженні на ЕОМ.

1.Ключев В.И. Теория электропривода.-М.: Энергоатомиздат, 1985. - 560 с. 2.Луцків М.М. Системи автоматичного керування ротаційними машинами з пружними зв'язками. - К.: Вища школа, 1991. - 71 с. 3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - М.: Техника, 1977. - 768 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.93.