

УДК 539.3: 539.4

**М. О. Кузін**

*Львівська філія Дніпропетровського національного університету  
залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна*

**ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ  
СТРУКТУРИ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ ДЕТАЛЕЙ  
З УРАХУВАННЯМ УМОВ ЕКСПЛУАТАЦІЇ**

*Аналізується сучасний стан проблеми підвищення міцності і довговічності деталей з функціонально-градієнтною структурою поверхневих шарів залежно від експлуатаційних силових навантажень. Пропонується варіант варіаційного формулювання задачі і розрахунковий приклад технологічного забезпечення параметризації роботи елементів конструкцій.*

***Неоднорідні металічні системи, функціонально-градієнтна структура, оптимальне проектування покриттів, математичне моделювання***

Однією з важливих проблем сучасної інженерії поверхні є обґрунтування вибору технологічних параметрів обладнання, забезпечення його заданого рівня надійності, безпеки та довговічності, а також максимально можливе зменшення ресурсоемності основних деталей і вузлів.

Життєвий цикл виробів значною мірою визначається якісним станом приповерхневих шарів як у вихідному стані, так і у процесі експлуатації [8]. Отож сьогодні в машинобудуванні сформувався пріоритетний напрям підвищення їх властивостей: розроблення і використання багатofункціональних захисних покриттів, які зміцнюють поверхневі шари деталей і забезпечують задані параметри експлуатації машин і механізмів [7].

**Сучасні вимоги до покриттів.** У практиці машинобудування висуваються певні вимоги до таких властивостей покриттів як зносостійкість, контактна міцність, теплостійкість (здатність до тепловідбивання), заданість параметрів міцності з'єднання покриття і основи. Додатковими факторами виступають також економічна ефективність запропонованих покриттів, висока технологічність і низька собівартість [2, 7].

Згідно з сучасними науково-технічними джерелами [6, 12], на працездатність приповерхневих шарів впливають більше десяти груп факторів, які можуть супроводжувати роботу деталей. Водночас забезпечення функціонування контактуючих пар у заданих межах пов'язано з регламентацією тільки двох груп показників: геометричного і фізико-механічного [2].

У статті із застосуванням підходів математичного моделювання розглянуто методику оптимального проектування геометричного і фізико-механічного параметрів приповерхневих шарів для забезпечення їх максимальної контактної міцності з урахуванням силового фактора фрикційного навантаження.

Розглянемо деформівне тверде тіло  $K$  з границею  $\partial K$ , яке перебуває в умовах силових фрикційних навантажень. Поставимо у відповідність системі  $K \cup \partial K$  область  $X \cup \partial X$  евклідового простору.

Границю тіла подамо у вигляді множин, що не перетинаються:

$$\partial K = \partial K_1 \cup \partial K_2 \cup \partial K_3, \quad (1)$$

де  $\partial K_1$  — частина поверхні тіла, яка ненавантажена,  $\partial K_2$  — частина поверхні тіла, де задані силові навантаження,  $\partial K_3$  — частина поверхні тіла, на якій задані переміщення.

Відповідно у евклідовому просторі маємо:

$$\partial X = \partial X_1 \cup \partial X_2 \cup \partial X_3, \quad (2)$$

де  $\partial K_1 \Leftrightarrow \partial X_1$ ,  $\partial K_2 \Leftrightarrow \partial X_2$ ,  $\partial K_3 \Leftrightarrow \partial X_3$ ,  $\Leftrightarrow$  — знак бієктивного відображення.

Згідно з (2) маємо:

$$\vec{u}_n^+ = \vec{u}_n^+(\partial X_2), \quad (3)$$

$$\vec{\sigma}_n^+ = \vec{\sigma}_n^+(\partial X_3). \quad (4)$$

Тут  $\vec{u}_n^+$  — вектор поверхневих переміщень,  $\vec{\sigma}_n^+$  — вектор силових навантажень.

На геометричні параметри профілю поверхні покриття апріорно накладемо припущення щодо виду функції – приймемо, що геометрія поверхні описується за допомогою функцій, які належать класу  $\mathbb{C}^n$  [4]:

$$f(x) \in \mathbb{C}^n. \quad (5)$$

Таке припущення не є принциповим обмеженням при моделюванні профілю поверхні, геометричні характеристики реальної поверхні, які описані за допомогою математичних абстракцій різної природи, завжди можна наближувати із заданою точністю при використанні гладких функцій [1].

При дослідженні поведінки тіла слід обмежитися модельним наближенням координатно-неоднорідного пружного середовища без наявності релаксацийних процесів [5]. При конкретизації фізико-механічних властивостей матеріалу як характеристик використаємо модуль пружності  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\mu$ , межу текучості  $\sigma_t$ .

Зв'язок між напруженнями і деформаціями конкретизуємо у вигляді лінійних фізичних співвідношень для ізотропного тіла:

$$\hat{\sigma}^s = K(x)e\hat{I} + 2G(x)\left(\hat{e} - \frac{1}{3}e\hat{I}\right), \quad (6)$$

де  $K(x)$  — модуль об'ємного стиску,  $G(x)$  — модуль зсуву,  $\hat{e} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^s$  — симетричний тензор деформації,  $e = \hat{e} \cdot \hat{I} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  — перший інваріант цього

тензора,  $\hat{I}$  — одиничний тензор,  $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$  — диференціальний оператор

Гамільтона,  $\otimes$  — символ тензорного добутку,  $\cdot$  — символ скалярного добутку,  $\vec{u}$  — вектор переміщень.

У результаті зовнішніх навантажень (3)–(4) в тілі виникає поле напружень, яке з урахуванням фізичних уявлень (6), залежить від форми поверхні (5) та розподілу фізико-механічних властивостей тіла:

$$\begin{cases} E \equiv E(x) \\ \mu \equiv \mu(x) \\ x \in X \cup \partial X \end{cases} \quad (7)$$

Однією з важливих характеристик конструкцій, що проектуються, є їх міцнісні параметри — здатність об'єкта чинити опір руйнуванню.

Як критерій міцності виберемо критерій Писаренко-Лебедева:

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 \leq [R], \quad (8)$$

де  $[R]$  — граничний рівень напружень,  $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — головні напруження,  $\chi$  — параметр, що характеризує міру участі деформації зсуву в макроруйнуванні, який визначається як:

$$\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_{cm}}, \quad (9)$$

де  $\sigma_p, \sigma_{cm}$  — межа міцності при розтягу і стиску відповідно.

У критерії (8) замість  $[R]$  використаємо межу текучості матеріалу  $\sigma_T$ .

Перейдемо від співвідношення (7) до такого виразу:

$$z(x) = \frac{(\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1) K}{\sigma_T}, \quad (10)$$

яке назвемо мірою локального знеміцнення конструкції.

У виразі (10) множник  $K$  є аналогом коефіцієнта запасу міцності.

У загальному випадку значення  $z(x)$  перебуває у таких межах:

$$0 \leq z(x) \leq 1, \quad (11)$$

де  $z(x) = 0$  — для ненавантаженої ділянки,  $z(x) = 1$  — для області, в якій пройшло знеміцнення.

При варіаційному формулюванні задача оптимального проектування геометричних та фізико-механічних властивостей приповерхневих шарів зводиться до пошуку таких функцій  $E(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\sigma_T(x)$ ,  $f(x)$ , які належать своїм допустимим множинам:

$$E(x) \in \tilde{E}, \mu(x) \in \tilde{\mu}, \sigma_T(x) \in \tilde{\sigma}_T, f(x) \in \tilde{f}, \quad (12)$$

і задовольняють умовам:

$$Z_1 \equiv Z_1(E(x), \mu(x), \sigma_T(x), f(x)) = \int_X z(x) dx \rightarrow \min \quad (13)$$

Умова (13) характеризує факт проектування конструкції так, щоб в області всього тіла було найменше значення знеміцнення.

У разі наявності в тілі областей з різним «рівнем значущості» («мірою важливості») критерій (13) набуває вигляду:

$$Z_1 \equiv \int_X \alpha(x) z(x) dx \rightarrow \min, \quad (14)$$

де  $\alpha(x)$  — «міра значущості» геометричного місця точок у тілі.

Прийmemo, що

$$0 \leq \alpha(x) \leq 1, x \in X \cup \partial X. \quad (15)$$

Варіаційне формулювання критерію (13) або (14) зводиться до розв'язання такої системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_1}{\partial E(x)} = 0 \\ \frac{\partial Z_1}{\partial \mu(x)} = 0 \\ \frac{\partial Z_1}{\partial \sigma_T(x)} = 0 \\ \frac{\partial Z_1}{\partial f(x)} = 0 \end{cases}. \quad (16)$$

**Розрахунковий приклад.** У межах вищенаведених модельних уявлень розглянемо розрахунковий приклад оптимального проектування фізико-механічних властивостей функціонально-градієнтних покриттів.

Слід обмежитися розглядом двовимірної контактної задачі про втиснення жорсткого штамп у фрагмент пружного півпростору (рис. 1).

Для розв'язання контактної задачі в цій постановці прийmemo, що механічні властивості матеріалу змінюються за таким законом:

$$f(l) = f_0 + f_1 e^{-hl}, \quad (17)$$

де  $f_0, f_1, h$  — сталі характерні при утворенні функціонально-градієнтних покриттів при заданих технологічних режимах поверхневих обробок.

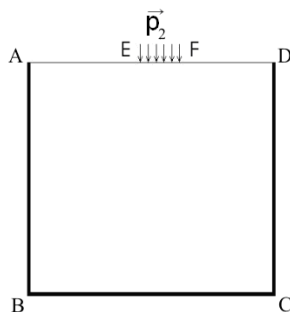


Рис. 1. Постановка задачі для фрагмента матеріалу у двовимірній постановці:

AB, BC, CD — закріплення фрагмента матеріалу  $\vec{u} = (0,0)$ ,  
EF — область, де задані вертикальні складові вектора навантажень

У виразі (17) величини  $f_0, f_1, h$  встановлюються з такої сукупності умов:

$$\begin{cases} \lim_{l \rightarrow \infty} f(l) = f_0 \\ f(0) = f_0 + f_1 \\ \left| \frac{f(l_1) - f_0}{f_0} \right| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (18)$$

де  $l_1$  — глибина, з якої починається асимптотичне наближення властивостей покриття і основи.

Однією з важливих характеристик утворених покриттів є величина зміни його властивостей за глибиною — «градієнт покриття», який описує поверхневі шари тіл залежно від енергетичного насичення при заданих технологічних операціях.

У межах прийнятих функціональних уявлень (17) градієнт покриття становить:

$$\text{Grad}_-f(l) = \vec{\nabla}f(l) = \frac{\partial f}{\partial l} = -f_1 \cdot h \cdot e^{-h \cdot l}. \quad (19)$$

А його максимальне значення є рівним:

$$\text{Max}_{l \in [0; +\infty)} |\text{Grad}_-f(l)| = |\text{Grad}_-f(0)| = f_1 \cdot h. \quad (20)$$

Варто зазначити, що вираз (20) показує величину обернену міцністному насиченню приповерхневих шарів: що більшим є  $\text{Max}_{l \in [0; +\infty)} |\text{Grad}_-f(l)|$ , то меншою буде товщина покриття (і навпаки).

Для конкретизації варіаційного формулювання (16) приймемо, що основним фактором при знеміцненні об'єкта в постановці задачі (рис. 1) є величина навантаження в області EF:

$$P = \int_{EF} p(x) dx. \quad (21)$$

При цьому величина зони знеміцнення, згідно із співвідношенням (13), дорівнює:

$$Z_1 = \int_{ABCD} z(x) dx. \quad (22)$$

Оскільки значення навантаження  $p(x)$  задане, то  $Z_1$  залежить від величини  $f_1 \cdot h$ :

$$Z_1 = Z_1(f_1 \cdot h). \quad (23)$$

Варіаційне формулювання в цьому випадку зводиться до такої постановки задачі:

$$\begin{cases} Z_1 \rightarrow \min \\ \text{Max}_{l \in [0; +\infty)} |Grad\_f(l)| - ? \end{cases} \quad (24)$$

Для розв'язання поставленої задачі приймемо, що основною функцією покриття є «вирівнювання» напружено-деформованого стану в приповерхневих шарах при навантаженні на деталь, а також зменшення зони знеміцнення конструкції в результаті зовнішніх впливів.

Грунтуючись на вищенаведеному апіорному припущенні, запропонуємо наступний чисельний алгоритм розв'язання співвідношення (24):

1. На початковому етапі приймемо величину  $\text{Max}_{l \in [0; +\infty)} |Grad\_f(l)| = \text{MaxGrad}$  достатньо великою (що відповідає покриттю з малою товщиною):  $\text{MaxGrad} = D_1$ ;
2. Для даного покриття розглянемо задачу (рис. 1). Розрахуємо напружено-деформований стан і знайдемо функціонал  $Z_1^1$  з виразу (22).
3. Зменшимо величину градієнта (що відповідає збільшенню товщини покриття) на величину  $\Delta grad$ :  $\text{MaxGrad} = \text{MaxGrad} - \Delta grad$ .
4. Для покриття заданої товщини згідно з п. 2 розрахуємо напружено-деформований стан і знайдемо функціонал  $Z_1^2$  (22).
5. Порівняємо отримані функціонали  $Z_1^1$  і  $Z_1^2$  згідно з умовою:

$$\left| \frac{Z_1^1 - Z_1^2}{Z_1^2} \right| \leq \delta, \quad (25)$$

де  $\delta$  — задане відхилення величини знеміцнення.

Якщо умова (25) виконується, то ми досягли значення величини градієнта  $\text{MaxGrad}$ , при якому при заданому навантаженні (21) величина знеміцнення зменшуватиметься несуттєво (параметр  $\delta$ ).

Якщо умова (25) не виконується, то параметру  $Z_1^1$  присвоюється

значення  $Z_1^2 : Z_1^1 = Z_1^2$  і переходимо до пункту 3 даного алгоритму (продовження ітераційного циклу).

Як приклад розглянемо іонно-плазмове термоциклічне азотування сталі 40X13, яка використовується для виготовлення деталей, що працюють в умовах зношування. Внаслідок технологічного зміцнення мікротвердість поверхневих шарів може змінюватися від 1000 кг/мм<sup>2</sup> (твердість на поверхні) до 400 кг/мм<sup>2</sup> (твердість основного металу).

Прийнявши, що механічні властивості матеріалу поверхневих шарів деталі змінюються за законом (17), отримаємо:

$$\begin{cases} f_0 = 400 \\ f_1 = 600 \end{cases} \quad (26)$$

Для повного аналізу співвідношення (17) необхідно також знайти параметр  $h$ , який характеризує енергетичне насичення поверхні. Його обчислюватимемо згідно із запропонованим алгоритмом.

Оскільки фрагмент матеріалу в постановці задачі (рис. 1) є неоднорідним, то для аналізу даного модельного випадку використаємо співвідношення роботи [5]:

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \left( \left( K(x) - \frac{2}{3} G(x) \right) (\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) \cdot \hat{I} + 2G(x) (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^s \right) = 0, \quad (27)$$

де  $\vec{\nabla}_0 = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}$  — оператор Гамільтона, що належить до початкової конфігурації,  $K(x)$  — модуль об'ємного стиску,  $G(x)$  — модуль зсуву,  $\hat{I}$  — одиничний тензор,  $(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^s$  — симетричний тензор деформації,  $\vec{u}$  — вектор переміщень.

Зв'язок між механічними властивостями зміцненої деталі і мікротвердості для сталей класу 40X13 приймемо за такою схемою [3, 6, 9]:

$$HV = HM \cdot \sin(68^\circ), \quad (28)$$

$$HB = HM \cdot \sin(65^\circ), \quad (29)$$

$$\frac{HM}{E} = 0.013, \quad (30)$$

$$\sigma_T \approx \frac{HB}{3}. \quad (31)$$

Коефіцієнт Пуассона як менш структурно-чутливий параметр приймемо рівним 0,3 [10].

Для розв'язання цієї задачі методом скінчених елементів було написано програму в середовищі Maple [13]. Коректність і точність розробленого

програмного забезпечення перевірялася за допомогою порівняння отриманих чисельних результатів з аналітичним розв'язком контактної задачі про втиснення жорсткого штампу в пружний півпростір [11].

Як початкове наближення обрано початкове значення  $D_1 = 1311$ , значення кроку  $\Delta grad = 0,1 \cdot D_1$ , величину  $\delta$  (умова (25)) —  $\delta = 0,05$ .

У результаті наведених числових експериментів при різних значеннях  $MaxGrad$  (градієнта насичення) (рис. 2) були отримані різні величини зон знеміцнення для однієї величини навантаження  $p_{max} = 4,02 \cdot 10^9 \text{ Па}$  (див. таблицю).

Аналіз отриманих результатів дає можливість дійти висновку, що збільшення товщини покриття (зменшення градієнта насичення) дозволяє суттєво підвищити контактну міцність поверхневих шарів деталей і вузлів тертя.

При цьому, що плавнішим є насичення утвореного покриття і більшим його глибинне насичення, то меншим буде розмір зон з мінімальним коефіцієнтом запасу контактної міцності (рис. 2).

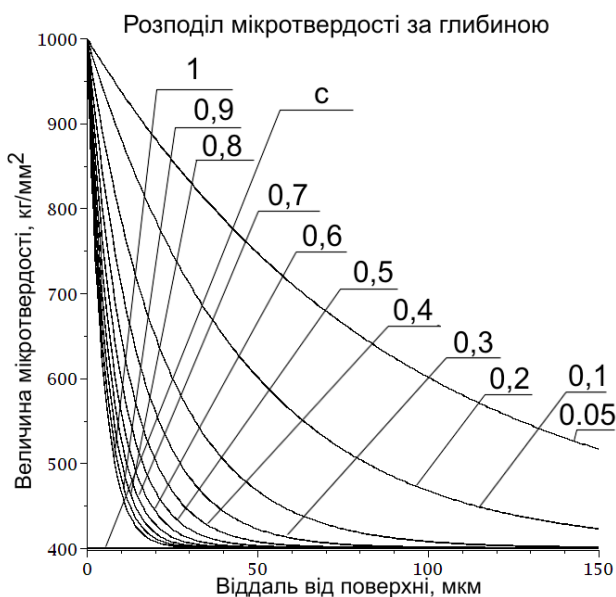


Рис. 2. Розподіл мікротвердості по глибині матеріалу при різних величині градієнта енергетичного насичення:

1 —  $D_0$ , 9 —  $0,9 \cdot D_0$ , 8 —  $0,8 \cdot D_0$ , 7 —  $0,7 \cdot D_0$ , 6 —  $0,6 \cdot D_0$ , 5 —  $0,5 \cdot D_0$ ,  
4 —  $0,4 \cdot D_0$ , 3 —  $0,3 \cdot D_0$ , 2 —  $0,2 \cdot D_0$ , 1 —  $0,1 \cdot D_0$ , 0,5 —  $0,05 \cdot D_0$ ,  
с — лінія мікротвердості матеріалу до насичення





Отже, у праці розглянуто задачі механіки деформівного твердого тіла, які присвячено оптимальному проектуванню елементів конструкцій при відомих зовнішніх умовах їх експлуатації. З використанням розробленої варіаційної моделі запропоновано постановку, алгоритм і чисельне розв'язання задачі встановлення параметрів покриття за критерієм мінімального розміру зони знеміцнення при заданих контактних навантаженнях. Встановлено, що величина градієнта енергетичного насичення є одним із визначальних факторів, який впливає на контактну міцність поверхневих шарів. Показано, що оптимальним є покриття, функціональні властивості якого забезпечують мінімальний розмір зони знеміцнення в заданих умовах експлуатації.

1. Аргатов И. И. Основы теории упругого дискретного контакта / И. И. Аргатов, Н. Н. Дмитриев. — СПб. : Политехника, 2003. — 233 с.
2. Бойко Н. И. Ресурсосберегающие технологии повышения качества поверхностных слоев деталей машин / Н. И. Бойко. — М.: Маршрут, 2006. — 198 с.
3. Булычев С. Н. Соотношение между восстановленной и невосстановленной твердостью при испытаниях наномикро-индентированием / С. Н. Булычев // ЖТФ. — 1999. — Т. 69, № 7. — с. 42–48.
4. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1977. — 832 с.
5. Кузин Н. О. Управление контактной прочностью материалов узлов трения подвижного состава с использованием математических и компьютерных моделей / Н. О. Кузин // Залізничний транспорт України. — 2011. — № 2. — с. 55–60.
6. Мильман Ю. В. Новые методики микромеханических испытаний материалов методом локального нагружения жестким индентором / Ю. В. Мильман // Сучасне матеріалознавство 21 ст. — К. : Наук. думка, 1998. — 660 с.
7. Оптимизация технологии нанесения покрытий по критериям прочности и износостойкости / [Ляшенко Б. А., Соловых Е. К., Мирненко В. И., Рутковский А. В. и др.]. — К.: ИПП, 2010. — 193 с.
8. Прочность материалов и конструкций: сер. моногр. Т. 2. Усталость металлов. Влияние состояния поверхности и контактного взаимодействия. — 2009. — 664 с.
9. Трибология. Физические основы, механика и технические приложения: учеб. для ВУЗов / И. И. Беркович, Д. Г. Громаковский; под. ред. Д. Г. Громаковского. — Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2000. — 268 с.
10. Таблица физических величин / Под ред. акад. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976. — 1008 с.
10. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 271 с.
11. ASM HANDBOOK. Volume 18. Friction, Lubrications and Wear Technology.
12. Portela A. Finite Elements Using Maple / A. Portela, A. Charati. — Springer, 2003. — 325 p.

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ДЕТАЛЕЙ С УЧЕТОМ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ**

*Проанализировано современное состояние проблемы повышения прочности и долговечности деталей с функционально-градиентной структурой поверхностных слоев в зависимости от эксплуатационных силовых нагрузок. Предложен вариант вариационной формулировки задачи и расчетный пример технологического обеспечения параметризации работы элементов конструкций.*

## **DETERMINATION OF THE OPTIMAL PARAMETERS OF THE STRUCTURE OF THE SURFACE LAYERS SUBJECT TO THE CONDITIONS OF OPERATION OF PRODUCTS**

*The current state of the problem of increasing the strength and durability of parts with functionally gradient structure of the surface layers, depending on the operating power loads. A variant of the variational formulation of the problem and calculated example of technological support parameterization of structural elements.*

*Стаття надійшла 24.09.2013*