Вып. 4. — С. 602–614. 2. Феофилов П. П. Поляризованная люминесценция атомов, молекул и кристаллов/ П. П. Феофилов. — М., Физматгиз, 1959. — 288 с. 3. Феофилов П. П. Скрытая оптическая анизотропия кубических кристаллов, содержащих локальне центры, и методы ее исследования / П. П. Феофилов, А. А. Каплянский // УФН. — 1962. — Т. 76, Вып. 2. — С. 201–238. 4. Compton W. D. Aqqreqate Centres in Alkali Halide Crystlals / W. D. Compton, H. F. Rabin // Solid State Phys. — 1964. — vol. 16. — № 1. — P. 121–226.

ОПТИЧЕСКИЙ ДИХРОИЗМ M_A- ЦЕНТРОВ ОКРАСКИ В $SrCl_2$–ME^+ КРИСТАЛЛАХ

Используется метод фотоиндуцированного дихроизма для построения дипольной модели M_A–центров окраски в кристаллах $SrCl_2 – Me^+$.

THE OPTICAL DICHROISM M_A COLORATIONS CENTERS IN $SrCl_2$–ME^+ CRYSTALS

Dipole model of M_A colorations centers in $SrCl_2 – Me^+$ crystals was constructed in the article. Method of photoinduced dichroism was used.

Стаття надійшла 10.11.2014

УДК 512.8

Р. В. Коляда

Українська академія друкарства

О. М. Мельник

Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С. З. Гжицького

СТРУКТУРА І ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКА МНОГОЧЛЕННОЇ ПРОСТОРОВОЇ МАТРИЦІ

Розглядається структура просторової многочленної матриці, її визначника і деякі його властивості. Лінеаризовано матричний многочлен, коефіцієнтами якого є кубічні числові матриці.

Просторова многочленна матриця, визначник матриці, лінеаризація

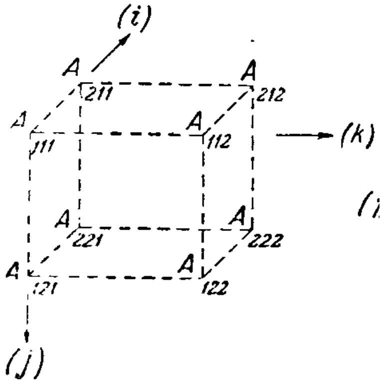
У праці [3] розглядалася теорія числових просторових матриць.

Нехай $P[x]$ — кільце многочленів над полем P. Довільна система з n^s елементів $A_{i_1,i_2,...,i_s}(x)$, $i_1,i_2,...,i_s = 1,2,...,n$, розміщених у точках s–вимірного простору називається s–вимірною многочленною матрицею порядку s над кільцем $P[x]$

$$A(x) = \left\| A_{i_1,i_2,...,i_s}(x) \right\|, \; (i_1,i_2,...,i_s = 1,2,...,n). \qquad (1)$$

Якщо $s \geq 2$, то матриця $A(x)$ є просторовою. Зокрема, якщо $s = 3$, то $\left\| A_{ijk}(x) \right\|$ — трьохвимірна (кубічна) матриця n–го порядку, n^3 елементів якої розміщені в точках тривимірного простору, що визначаються координатами i, j, k.

Наприклад, система з 2^3 елементів $A_{i\,j\,k}(x)$, $i, j, k = 1, 2$, розміщених у вигляді куба, задає кубічну матрицю другого порядку:



Довільна система з n^s елементів $A_{i\,j}(x)$ $(s = 2)$ кільця $P[x]$, розміщених у точках площини з прямокутними координатами (i, j) іменується квадратною многочленною матрицею $A(x) = \left\| A_{ij}(x) \right\|$ n–го порядку над $P[x]$, яку можна подати як матричний многочлен

$$A_{i\,j}(x) = A_{i\,j}^{(0)} x^m + A_{i\,j}^{(1)} x^{m-1} + \ldots + A_{i\,j}^{(m)},$$

де $A_{i\,j}^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, m$ — квадратні числові матриці n–го порядку.

Сукупність елементів матриці $\left\| A_{i\,j\,k}(x) \right\|$ з фіксованим значенням індексу i називається перетином орієнтації (i). Усі перетини орієнтації (i) в матриці $\left\| A_{i\,j\,k}(x) \right\|$ паралельні між собою і є квадратними матрицями n–го порядку

$$\left\| A_{1\,j\,k}(x) \right\|, \left\| A_{2\,j\,k}(x) \right\|, \ldots, \left\| A_{n\,j\,k}(x) \right\|, \; j, k = 1, 2, \ldots. n.$$

Аналогічно визначаються перетини орієнтації (j) та (k).

Сукупність елементів матриці $\left\| A_{i\,j\,k}(x) \right\|$ з фіксованими значеннями індексів j та k називається двократним перетином орієнтації $(j\,k)$ або рядком напряму (i). Всі n^2 рядків цього напряму паралельні між собою і є одновимірними матрицями n–го порядку

$$\left\| A_{1\,\bar{j}\,\bar{k}}(x) \quad A_{2\,\bar{j}\,\bar{k}}(x) \quad \ldots \quad A_{n\,\bar{j}\,\bar{k}}(x) \right\|,$$

де $\bar{i}, \bar{k}$ — фіксовані значення індексів j та k.

Аналогічно визначаються рядки напрямів (j) та (k).

У кубічній матриці n–го порядку два перетини різних орієнтацій містять n спільних елементів, розміщених в одному рядку, а три перетини різних орієнтацій мають лише один спільний елемент. Кожен перетин будь-якої орієнтації і кожен рядок перпендикулярного до цього перетину напряму мають лише один спільний елемент. Відповідними елементами двох паралельних перетинів іменуються елементи, що належать одному і тому ж рядку, перпендикулярному до цих рядків.

Застосовуючи двовимірні перетини, просторову матрицю можна записати у вигляді квадратної або прямокутної таблиці залежно від парності чи непарності числа вимірів матриці. Двовимірні перетини при цьому відокремлені один від одного вертикальною або горизонтальною лініями. Кубічну матрицю (1) за допомогою перетинів орієнтації (i) можна записати у вигляді прямокутника

$$\left\| \begin{matrix} A_{111}(x) & A_{112}(x) & | & A_{211}(x) & A_{212}(x) \\ A_{121}(x) & A_{122}(x) & | & A_{221}(x) & A_{222}(x) \end{matrix} \right\|^{\to(i)} \downarrow_{(j)}^{\to(k)} .$$

Стрілки вказують на напрями, в яких зростають відповідні індекси. Елементи просторової матриці, в кількості, що не перевищує її порядку n, називаються трансверсальними, якщо жодна з пар не належить одному і тому ж перетину будь-якої орієнтації. Сукупність n трансверсальних елементів просторової матриці, подано у вигляді одновимірної матриці n–го порядку, утворюють трансверсаль.

Число трансверсалей s–вимірної матриці n–го порядку дорівнює $(n!)^{s-1}$. Серед них є 2^{s-1} діагоналей, утворених елементами, які розміщені на прямих, що з'єднують протилежні вершини матриці.

Запишемо кубічну матрицю $n-$го порядку (1), елементами якої є квадратні тричлени у вигляді

$$A(x) = A_{ijk}^{(0)} x^2 + A_{ijk}^{(1)} x + A_{ijk}^{(2)}, \tag{2}$$

де $A_{ijk}^{(m)}$, $m = 0,1,2$ — числові кубічні матриці.

Сукупність елементів кубічної матриці з фіксованим значенням індексу i називається перерізом орієнтації (i). Аналогічно визначаються перерізи орієнтацій (j) і (k).

Для всіх трансверсалей матриці A_{ijk} сума

$$\left| A_{\overset{+}{i}\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}} \right| = \sum (-1)^{I_j + I_k} A_{i(1)j(1)k(1)} A_{i(2)j(2)k(2)} \cdots A_{i(n)j(n)k(n)} ,$$

де сумування поширено на всі можливі комбінації будь-якої перестановки $j^{(1)}, j^{(2)}, \ldots, j^{(n)}$ з будь-якою перестановкою $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots k^{(n)}$ при фіксованій $i^{(1)}, i^{(2)}, \ldots, i^{(n)}$, називається кубічним визначником $n-$го порядку з сигнатурою $(\overset{+}{i}\,\overset{\pm}{j}\,\overset{\pm}{k})$. Сукупність $(n!)^2$ членів вигляду $A_{i(1)j(1)k(1)} A_{i(2)j(2)k(2)} \cdots A_{i(n)j(n)k(n)}$ задає кубічний детермінант $n-$го порядку з сигнатурою $(\overset{+}{i}\,\overset{\pm}{j}\,\overset{\pm}{k})$. Для кожної трансверсалі i (або j чи k) запишемо визначник у вигляді многочлена

$$p(x)=p_0^i x^{2n}+p_1^i x^{2n-1}+\ldots+p_{2n}^i . \tag{3}$$

Справедливі наступні теореми, враховуючи [1] і [2].

Теорема 1. Для многочленної кубічної матриці (2) і визначника (3) справедливі співвідношення $p^i{}_1 = trA^1{}_{ijk}$, $p^i{}_{2n}=\det A^2{}_{ijk}$.

З теореми при $i,j,k=1$ випливає теорема Вієта.

Нехай $A(x)=\left\|A_{ijk}(x)\right\|$, $(i,j,k=1,2,...,n)$ — кубічна матриця n–го порядку, елементами якої є квадратні тричлени, яку запишемо так:

$$A(x)=A_{ijk}^{(0)}x^2+A_{ijk}^{(1)}x+A_{ijk}^{(2)}, \tag{4}$$

де A_{ijk}^m, $m=0,1,2$ — числові кубічні матриці, $p(x)=p_0^i x^{2n}+p_1^i x^{2n-1}+\ldots+p_{2n}^i$ її визначник [3].

Теорема 2. Для многочленної кубічної матриці (4) з визначником (3) для кожної трансверсалі i,j,k визначено многочлен

$$\mathbf{E}x-\mathbf{L}=\begin{Vmatrix}\mathbf{E}_{ijk} & 0\\ 0 & \mathbf{A}_{ijk}^0\end{Vmatrix}\cdot x-\begin{Vmatrix}0 & \mathbf{E}\\ -\mathbf{A}_{ijk}^2 & -\mathbf{A}_{ijk}^1\end{Vmatrix},$$

де $\mathbf{A}_{ijk}^s=\begin{Vmatrix}0 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ p^i{}_{s+2(n-1)} & \ldots & p^i{}_{s+2} & p^i{}_s\end{Vmatrix}$, $s=1,2$, $\mathbf{A}_{ijk}^0=\begin{Vmatrix}0 & -1 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1\\ p^i{}_{2n} & p^i{}_{2(n-1)} & \ldots & p^i{}_4 & p^i{}_2\end{Vmatrix}$,

такий, що $det\,\mathbf{A}(x)=det(\mathbf{E}x-\mathbf{L})$.

Теорема 3. Матриця $\mathbf{E}x-\mathbf{L}$ є лінеаризацією [1] матричного многочлена (4).

Теорема 4. Кожну матрицю (4) можна подати як

$$A(x)=A_{ijk}^{(0)}(E_{ijk}x-B_{ijk}^{(1)})(E_{ijk}x-B_{ijk}^{(2)})$$

по кожній трансверсалі i, j або k, якщо не дорівнює нулю визначник

$$\begin{vmatrix}
p_0^i & p_1^i & \ldots & p_{2n}^i & 0 & 0\\
0 & p_0^i & \ldots & p_{2n-1}^i & p_{2n}^i & 0\\
. & . & \ldots & . & . & .\\
0 & \ldots & p_0^i & \ldots & p_{2n-1}^i & p_{2n}^i\\
(2n-1)2np_0^i & (2n-1)(2n-2)p_1^i & \ldots & 2p_{2n-2}^i & 0 & 0\\
0 & (2n-1)2np_0^i & \ldots & 6p_{2n-3}^i & 2p_{2n-2}^i & 0\\
. & . & \ldots & . & . & .\\
0 & 0 & \ldots & . & \ldots & 2p_{2n-2}^i
\end{vmatrix}.$$

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с. 2. Коляда Р. В. О некоторых свойствах коэффициентов характеристического многочлена полиномиальной матрицы / Р. В. Коляда // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. — К. : Наук. думка, 1989. — С. 103–106. 3. Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения / Н. П. Соколов. — М., 1960. 4. Melnyk O. M. Onmonic divisors of polynomial matrices. Book of abstracts jf the International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of L.A.Kaluzhnin will be held on July 7–12, 2014 / O. M. Melnyk, R. V. Kolyada. — Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2014. — P. 102.

СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МНОГОЧЛЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАТРИЦЫ

Рассматривается структура пространственной многочленной матрицы, ее определителя и некоторые его свойства. Линеаризировано матричный многочлен, коэффициентами которого являються кубические числовие матрицы.

THE STRUCTURE AND SOME PROPERTIES DETERMINANT OF A SPATIAL POLYNOMIAL MATRIX.

The paper deals with the structure of a spatial polynomial matrix, its determinant and some of its properties. A matrix polynomial with cubical numerical matrices as its coefficients is linearized.

Стаття надійшла 10.11.2014