

ПРО СИНТЕЗ ЗАКОНІВ РУХУ ВЕДЕНОЇ ЛАНКИ У ВИГЛЯДІ СТЕПЕНЕВИХ ПОЛІНОМІВ

За останні роки у вітчизняній та зарубіжній технічній літературі опублікована велика кількість праць, які висвітлюють синтез законів руху ведених ланок кулачкових механізмів. Велика увага приділяється законам, що описуються степеневими поліномами (1-4 та ін.). Це зв'язано з наявністю в них цілого ряду позитивних властивостей: можливістю наближеного описування будь-якого бажаного закону руху веденої ланки з необхідним ступенем точності, простотою визначення коефіцієнтів полінома та розрахунку таблиць інваріантів подібності на цифрових обчислювальних машинах. Причому одну програму, підготовлену для розрахунку таблиці значень полінома ступеня n на цифровій обчислювальній машині, можна використовувати надалі для будь-якого полінома ступеня m , якщо $m \leq n$.

Автором була синтезована велика кількість різноманітних законів руху веденої ланки. Деякі результати досліджень цих законів наводяться нижче.

В загальному вигляді закон руху переміщень веденої ланки можна описати таким степеневим поліномом:

$$a_k = q_0 + q_1 k + q_2 k^2 + q_3 k^3 + \dots + q_n k^n. \quad (1)$$

Далі будемо користуватись безрозмірними інваріантами подібності (4):

$$k = \frac{t}{T} \quad \text{— відносний час;}$$

$$a_k = \frac{s}{S_n} \quad \text{— інваріант подібності переміщення веденої ланки;}$$

$$b_k = \frac{v}{S_n \cdot T^{-1}} \quad \text{— інваріант подібності швидкості руху веденої ланки;}$$

$$c_k = \frac{w}{S_n \cdot T^{-2}} \quad \text{— інваріант подібності прискорень веденої ланки;}$$

$$d_k = b_k \cdot c_k \quad \text{— інваріант подібності кінетичної потужності;}$$

$$B = |b_k|_{\max}, \quad C = |c_k|_{\max}, \quad D = |d_k|_{\max} \quad \text{— відповідно константи піків швидкості, прискорень та кінетичної потужності,}$$

де S_n — хід веденої ланки (штовхача);

T — тривалість періоду віддалення, *сек*.

Надаючи ряд умов (як в граничних, так і в проміжних точках) на функцію a_k та її похідні, можна отримати закон руху веденої ланки з бажаними характеристиками. Так, для симетричних законів руху веденої ланки, працюючої за схемою зупинка—підйом—зупинка, можна накласти такі умови: в початковий момент при $k=0$ необхідно, щоб

$a_{k_0} = 0, b_{k_0} = 0$. Прискорення в початковий момент можна прирівняти до нуля, або надати йому якусь кінцеву величину ($c_k = c_{k_0} \geq 0$). Крім цього, можна при необхідності задати початкові значення похідним більш високого порядку

$$\left| \frac{dc_k}{dk} \right|_{k=0} \geq 0, \quad \left| \frac{d^2 c_k}{dk^2} \right|_{k=0} \geq 0$$

На тій підставі, що закон руху є симетричним, в кінцевий момент часу при $k=1$ функція переміщення та її похідні повинні мати такі значення:

$$a_{k1} = 1; b_{k1} = 0; c_{k1} = -c_{k0}$$

$$\frac{dc_{k1}}{dk} = -\frac{dc_{k0}}{dk}; \quad \frac{d^2 c_{k1}}{dk^2} = -\frac{d^2 c_{k0}}{dk^2}$$

Посередині циклу при $k=0,5$ прискорення $c_k = 0$, швидкість має максимальне значення прискорення на ділянці розбігу при $k=u$, $\frac{dc_k}{dk} = 0$, $c_k = c_{k \max} = C$; на ділянці вибігу при $k=1-u$,

$$\frac{dc_k}{dk} = 0, c_k = c_{k \max} = -C.$$

При синтезі несиметричних законів руху веденої ланки потрібно вказати момент часу (k), в який значення швидкості досягає максимальної величини з нагромадженням тих же умов, що і при $k=0,5$ для симетричних законів. Крім цього, для несиметричних законів можна окремо вказати моменти часу, коли прискорення має екстремальні значення із заданням їх величини окремо на ділянці розбігу та на ділянці вибігу.

Коротко всі ці умови можна записати так:

$$1) \text{ при } k=0, b_{k_0} = 0, c_{k_0} \geq 0, \frac{dc_{k_0}}{dk} = c'_{k_0}, \frac{d^2 c_{k_0}}{dk^2} = c''_{k_0};$$

$$2) \text{ при } k=u_1, \frac{dc_k}{dk} = 0, c_k = c_{k \max} = C_1;$$

$$3) \text{ при } k=u_2, c_k = 0, b_{k_1} = b_{k \max} = B;$$

$$4) \text{ при } k=u_3, \frac{dc_k}{dk} = 0, c_k = c_{k \min} = -|C_2|;$$

$$5) \text{ при } k=1, a_{k1} = 1, b_{k1} = 0, c_{k1} \leq 0,$$

$$\frac{dc_{k1}}{dk} = c'_{k1}, \quad \frac{d^2 c_{k1}}{dk^2} = c''_{k1}.$$

Практично, як правило, використовується тільки частина перерахованих вище умов.

Для визначення коефіцієнтів полінома потрібно підставити умови (2) в рівняння (1) та в вирази похідних від рівняння (1).

При цьому за початковими умовами визначається частина коефіцієнтів. Всі інші умови створюють систему рівнянь, лінійних відносно невідомих коефіцієнтів. Так, при накладанні n умов, з яких m — початкові умови, утворюється система $b - m$ лінійних рівнянь.

Розв'язок таких систем досить легко виконується на цифрових обчислювальних машинах, які мають спеціальні стандартні програми для розв'язку систем лінійних рівнянь.

При накладанні n умов отримується поліном степеня $(n - 1)$. Нами була синтезована велика кількість законів руху як симетричних, так і асиметричних, з початковим прискоренням та без нього. Зупинимось на симетричних законах руху з нульовими початковими умовами. При синтезі законів задавалась точка, в якій прискорення має екстремальне

значення ($k=u$), і величина екстремального значення прискорення (константи піка прискорень C). Були задані такі значення u :

$$u_1=0,25; u_2=0,20; u_3=0,15; u_4=0,10.$$

При кожному фіксованому значенні проводилась зміна констант піків прискорень

$$C_1=4,75; C_2=5; C_3=5,25; C_4=5,5; C_5=5,75; C_6=6,00; C_7=6,25; C_8=6,5.$$

Надалі будемо позначати закони руху двозначними цифрами. Перша цифра (римська) відноситься до u_i , друга (арабська) — до C_i .

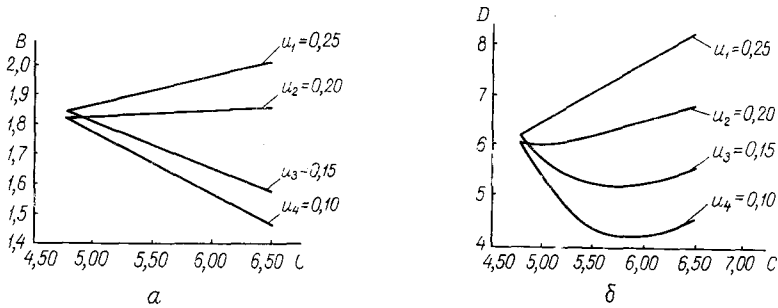


Рис. 1. Графіки зміни констант піків швидкостей (а) і потужностей (б).

На рис. 1 нанесено по чотири лінії, що вказують на закон зміни констант піків швидкості (B) і кінетичної потужності (D) для зазначених вище чотирьох значень u_i при зміні величини констант піків прискорень.

Ці графіки підтверджують відоме положення про те, що зміщення центра ваги однозначних прискорень від середини інтервалу приводить до зменшення констант піків швидкості та кінетичної потужності. В кінці статті наведені таблиці інваріантів подібності переміщень (a_k), швидкості (b_k), прискорень (c_k) та кінетичної потужності (d_k) для деяких синтезованих законів у вигляді поліномів дев'ятого степеня. Для цих же законів в табл. 1 наведені величини основних кінематичних та динамічних характеристик:

Таблиця 1

Шифр закону	B	C	D	$I_0 = \left(\frac{dc_k}{dk} \right)_{k=0}$
II-1	1,834	4,75	6,05	123,84
II-7	1,850	6,25	6,70	31,56
IV-5	1,620	5,75	4,20	155,41
IV-8	1,463	6,50	4,55	165,42
7.3	2,264	7,85	12,09	37,80

Закон II-1 має найменшу (з числа синтезованих нами законів) величину константи піка прискорень, IV-5 — найменшу константу піка кінетичної потужності, IV-8 — найменшу константу піка швидкості.

Закон II-7 у порівнянні з законом « C_0 » (діаграма прискорень — синусоїда) не тільки має менше значення константи піків швидкості та кінетичної потужності, але й меншу величину похідної від прискорення в початковий момент (для закону « C_0 » $I_0=39,44$).

Закон 7,3 з іншої групи синтезованих нами поліномів. Він вигідно відрізняється від вище описаних законів тим, що в більшому діапазоні

частотних характеристик веденої системи ($20 \leq p \cdot T \leq \infty$), де власна частота p ($\frac{1}{сек}$) викликає малі амплітуди власних коливань, які накладаються на примусовий рух робочого тіла (амплітуда прискорень від власних коливань не перевищує 0,73 одиниці інваріанту подібності прискорень).

При наявності демфівування (підшипники ковзання) механізм з кулачком, спрофільований за цим законом, працює плавно, без вібрацій навіть на резонансному режимі, так як малі коливання встигають загаснути до початку наступного циклу.

На рис. 2 зображено криві зміни інваріантів подібності прискорень для описаних законів.

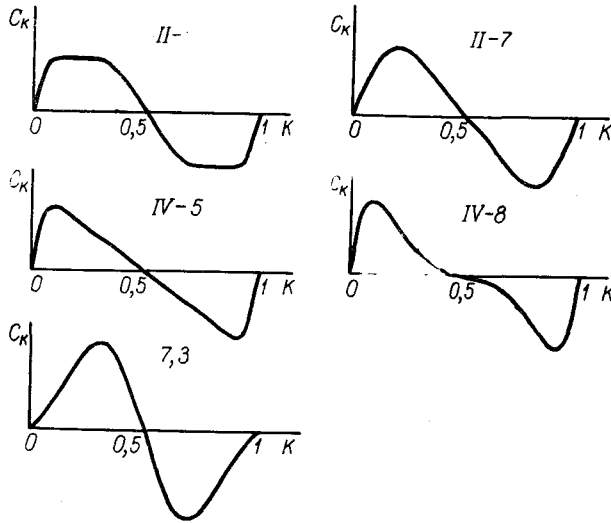


Рис. 2. Графіки зміни інваріантів подібності прискорень II-1; II-7; IV-5; IV-8; 7,3 — шифр закону.

В таблицях наведені величини інваріантів подібності для двадцяти одного значення відносного часу в інтервалі $0 \leq k \leq 1$ з шагом $\Delta k = 0,05$.

Такої кількості значень інваріантів подібності досить для проведення кінематичних і динамічних розрахунків при проектуванні механізмів. Ці ж таблиці можна використовувати при розрахунках координат профілю для обробки кулачка, для чого необхідно збільшити кількість значень a_k за допомогою формули квадратичного інтерполювання табличних значень функції. При цьому можна брати таку формулу:

$$a_k = \left[0,5 \cdot \Delta b_{ki} \cdot \left(\frac{k - k_i}{\Delta k} - 1 \right) + \frac{\Delta a_{ki}}{\Delta k} \right] \cdot (k - k_i) + a_{ki} \quad (2)$$

В ній використовуються перші табличні різниці інваріантів подібності переміщень та швидкості на ділянці від a_{ki} до $a_{k(i+1)}$

$$\Delta a_{ki} = a_{k(i+1)} - a_{ki}, \quad \Delta b_{ki} = b_{k(i+1)} - b_{ki}.$$

Формула (2) є достатньо точною — помилка розрахунку не перевищує $\Delta a_k = 0,0001$.

Причому точність не зменшується на початку та в кінці таблиці (на першій та останній ділянці).

Коли є необхідність в більш високій точності розрахунків, можна користуватись формулами кубічної інтерполяції. Потрібно відмітити, що точність розрахунків за формулою (2) повністю задовольняє вимоги машинобудівників поліграфічної, харчової та легкої промисловості.

Таблиці позиційних інваріантів подібності

ЗАКОН II-1

$k = \frac{t}{T}$	$a_k = \frac{s}{S}$	$b_k = \frac{v}{ST-1}$	$c_k = \frac{w}{S \cdot T^{-2}}$	$d_k = b_k \cdot c_k$
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000
0,05	0,002013	0,111153	3,735811	0,414
0,10	0,012804	0,328137	4,684139	1,536
0,15	0,035138	0,565799	4,768342	2,699
0,20	0,069377	0,803594	4,748952	3,813
0,25	0,115493	1,041013	4,739850	4,934
0,30	0,173427	1,275016	4,576102	5,834
0,35	0,242726	1,492602	4,054666	6,054
0,40	0,322063	1,672662	3,069151	5,134
0,45	0,408983	1,792377	1,659815	2,975
0,50	0,500000	1,834425	0,000000	0,000
0,55	0,591017	1,792377	-1,659815	-2,975
0,60	0,677937	1,672662	-3,069151	-5,134
0,65	0,757274	1,492602	-4,054666	-6,054
0,70	0,826573	1,275016	-4,576102	-5,834
0,75	0,884507	1,041013	-4,739850	-4,934
0,80	0,930623	0,803594	-4,748952	-3,813
0,85	0,964862	0,565799	-4,768342	-2,699
0,90	0,987196	0,328137	-4,684139	-1,536
0,95	0,997987	0,111153	-3,735811	-0,414
1,00	1,000000	0,000000	0,000000	0,000

ЗАКОН II-7

P	a_k	b_k	c_k	d_k
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000
0,05	0,000802	0,050180	2,139148	0,107
0,10	0,006958	0,214599	4,353914	0,934
0,15	0,023829	0,472275	5,792124	2,738
0,20	0,054974	0,777295	6,250620	4,858
0,25	0,101569	1,083359	5,874623	6,364
0,30	0,162736	1,355534	4,944899	6,703
0,35	0,236209	1,573312	3,740194	5,884
0,40	0,319018	1,728394	2,462374	4,256
0,45	0,407990	1,820053	1,211745	2,205
0,50	0,500000	1,850245	0,000000	0,000
0,55	0,592010	1,820053	-1,211745	-2,205
0,60	0,680982	1,728394	-2,462374	-4,256
0,65	0,763791	1,573312	-3,740194	-5,884
0,70	0,837264	1,355534	-4,944899	-6,703
0,75	0,898431	1,083359	-5,874623	-6,364
0,80	0,945026	0,777295	-6,250620	-4,858
0,85	0,976171	0,472275	-5,792124	-2,738
0,90	0,993042	0,214599	-4,353914	-0,934
0,95	0,999198	0,050180	-2,139148	-0,107
1,00	1,000000	0,000000	0,000000	-0,000

ЗАКОН IV-5

0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000
0,05	0,002550	0,141018	4,747647	0,669
0,10	0,016207	0,413348	5,753152	2,378
0,15	0,043950	0,692245	5,275846	3,652
0,20	0,084814	0,935206	4,432349	4,145
0,25	0,136774	0,136644	3,646940	4,145
0,30	0,197877	1,301930	2,978917	3,878
0,35	0,266434	1,435096	2,344512	3,364
0,40	0,340840	1,535362	1,650948	2,535
0,45	0,419352	1,598533	0,860192	1,375
0,50	0,500000	1,620199	0,000000	0,000
0,55	0,580648	1,598533	-0,860192	-1,375

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0,60	0,659160	1,535362	-1,650948	-2,535
0,65	0,733566	1,435096	-2,344512	-3,364
0,70	0,802123	1,301930	-2,978917	-3,878
0,75	0,863226	1,136644	-3,646940	-4,145
0,80	0,915186	0,935206	-4,432349	-4,145
0,85	0,956050	0,692245	-5,275846	-3,652
0,90	0,983793	0,413348	-5,753152	-2,378
0,95	0,997450	0,141018	-4,747647	-0,669
1,00	1,000000	0,000000	0,000000	0,000

ЗАКОН IV-8

0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000
0,05	0,002773	0,154364	5,268594	0,813
0,10	0,017889	0,460287	6,502460	2,993
0,15	0,048868	0,772890	5,804674	4,487
0,20	0,094221	1,029562	4,416275	4,547
0,25	0,150612	1,214216	2,997768	3,640
0,30	0,214554	1,333820	1,841128	2,455
0,35	0,283170	1,404018	1,022238	1,435
0,40	0,354405	1,441076	0,503676	0,726
0,45	0,426944	1,457939	0,197792	0,288
0,50	0,500000	1,462658	0,000000	0,000
0,55	0,573056	1,457939	-0,197792	-0,288
0,60	0,645595	1,441076	-0,503676	-0,726
0,65	0,716830	1,404018	-1,022238	-1,435
0,70	0,785446	1,333820	-1,841128	-2,455
0,75	0,849388	1,214216	-2,997768	-3,640
0,80	0,905779	1,029562	-4,416278	-4,547
0,85	0,951132	0,772890	-5,804674	-4,487
0,90	0,982111	0,460287	-6,520460	-2,993
0,95	0,997227	0,154364	-5,268594	-0,813
1,00	1,000000	0,000000	0,000000	0,000

ЗАКОН 7,3

0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000
0,05	0,000641	0,036398	1,321712	0,047
0,10	0,004565	0,130126	2,476656	0,322
0,15	0,014769	0,290921	4,018860	1,169
0,20	0,035064	0,535450	5,757696	3,138
0,25	0,069691	0,861713	7,198242	6,205
0,30	0,122146	1,241900	7,842744	9,741
0,35	0,193973	1,627265	7,362996	11,996
0,40	0,283986	1,959552	5,733504	11,231
0,45	0,388131	2,184516	3,135262	6,867
0,50	0,500000	2,264062	0,000000	0,000
0,55	0,611869	2,184516	-3,135262	-6,867
0,60	0,716014	1,959552	-5,733504	-11,231
0,65	0,806027	1,627265	-7,372996	-11,996
0,70	0,877854	1,241900	-7,842744	-9,741
0,75	0,930309	0,861713	-7,198242	-6,205
0,80	0,964936	0,535450	-5,757696	-3,138
0,85	0,985231	0,290921	-4,018860	-1,169
0,90	0,995435	0,130126	-2,476656	-0,322
0,95	0,999359	0,036398	-1,321712	-0,047
1,00	1,000000	0,000000	0,000000	0,000

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус. О законе подъема с наименьшим пиком ускорений. Тр. семинара по ТММ, т. IV, вып. 15. Изд-во АН СССР, 1948.
2. Э. Е. Пейсах. О синтезе функции перемещения ведомого звена механизма в виде полиномов. Известия вузов СССР, «Машиностроение», 1965, № 1.
3. Г. А. Ротбарт. Кулачковые механизмы. Судпромгиз, 1960.
4. К. В. Гир. Комплексный расчет кулачковых механизмов. Машгиз, 1958.

E. A. SAVVIN

**ABOUT THE SYNTHESIS OF THE LAWS OF MOVEMENT OF THE LEAD-LINK
IN THE KIND OF GRADE-POLYNOMES**

Summary

We regard in this article the method of synthesis of the laws of movement in lead-links of the cam mechanisms, in the form of grad-polynomes on the given conditions. The tables with the invariation of similarity for the five laws of movement are given at the end of the article. One shows the possibility of the widening of these tables to the needed number of meanings by the method of square interpolation.
