УДК 517

В.К.Овсяк

ПОГЛИБЛЕНА ОПТИМІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ АЛГОРИТМІВ, ІНТЕРПРЕТОВАНИХ ВПОРЯДКУВАННЯМИ СИМВОЛІВ

Описано метод формалізації й еквівалентних перетворень алгоритмів. Концепція підходу полягає у формалізованому впорядкуванні операторів послідовностей, якими інтерпретуються алгоритми інформаційно-технологічних систем. Введені операції означені на парах оператор—індекс так, що результатом виконання операцій є сформована за індексами послідовність операторів. Властивості операцій забезпечують виконання еквівалентних перетворень алгоритмів, поданих послідовностями індексованих операторів.

Алгоритми є основою інформаційно-технологічних систем. Відомо [1, 2], що розроблювані алгоритми складних систем вимагають поліпшення і не виключають помилок, витрати на знаходження яких на кожному наступному етапі проектування в порівнянні з попереднім, як правило, зростають на порядок, а буває і так, що проект розробляється заново. Засобами сучасних алгоритмічних мов, теоретичним фундаментом яких є загальновідомі [4, 5, 7] інтерпретації алгоритмів послідовностями заданих операторів (символів), неможливо виконати перетворення алгоритмів, що встановлено в дослідженні [3]. А причина цього, як це показано в роботі [6], у тому, що над операторами не означені операції. Тому, враховуючи потребу в оптимізації і дослідженні вірогідності алгоритмів, актуальним є створення засобів еквівалентних перетворень алгоритмів інформаційно-технологічних систем.

Розглянемо одну з можливостей створення таких засобів. Концепція підходу полягає в означенні відповідних операцій над операторами. Потрібні операції, якими утворюються послідовності, розгалуження і цикли операторів. Позначимо оператори малими буквами латинського алфавіту.

Символи, якими в результаті виконання операцій буде визначатись черговість виконання операторів, назвемо індексами і позначимо малими буквами з кінця грецького алфавіту. Індекси приймають одне з двох значень, які позначимо α і β.

Для вирівнювання індексів операторів введемо порожній оператор, який позначимо зірочкою (*).

Записані у фігурних дужках через кому оператор та індекс назвемо парою. Наприклад, парами є $\{x, \alpha\}$, $\{y, \beta\}$, $\{*, \alpha\}$.

Для створення засобів еквівалентних перетворень алгоритмів інформаційно-технологічних систем вводимо такі операції:

А. Операцію строгого впорядкування, призначену для утворення пар з двох операторів і двох символів. Позначимо її $\overline{(x, y), (\alpha, \beta)}$, де $\overline{\qquad}$ — знак операції, яким зручно охоплювати оператори, коли вони розташовані не тільки поряд; (x, y) — оператори; (α, β) — символи. Визначається операція такими властивостями:

1. Комутативність:

$$\overline{(x, y), (\alpha, \alpha)} = \overline{(y, x), (\alpha, \alpha)}.$$

2. Асоціативність:

$$\overline{(\overline{(x, y), (\alpha, \alpha)}\ , z), (\alpha, \alpha)} = \overline{(x, \overline{(y, z), (\alpha, \alpha)})\ , (\alpha, \alpha)}.$$

3. Утворення пар:

$$\overline{(x, y), (\alpha, \varphi)} = \{x, \alpha\}, \{y, \varphi\}.$$

4. Внесення індексу під знак операції:

$$\{\overline{(x, y), (\alpha, \varphi)}, \psi\} = \overline{(\{x, \psi\}, \{y, \psi\}),\ (\alpha, \varphi)}.$$

5. Індексування пар:

$$\overline{(\{x, \psi\}, \{y, \psi\}),\ (\alpha, \varphi)} = \{\{x, \alpha\}, \alpha\}, \{\{y, \varphi\}, \psi\}.$$

6. Поглинання порожнього оператора:

$$\overline{(*, x), (\alpha, \varphi)} = x, \qquad \overline{(x, *), (\alpha, \varphi)} = x.$$

Приклад. Нехай оператори x, y, z потрібно виконати в такому порядку: x — першим, y — другим, z —третім.

Як це видно з наведених властивостей операції строгого впорядкування, нею операторам приписуються індекси. А якщо після першого разу над операторами виконати операцію ще й другий раз, то вони матимуть уже два індекси. Тому черговість виконання операторів встановлюємо за кількістю індексів, але так, що першим виконуватиметься той з них, який має найбільше індексів α, другим — на один менше і так далі, а останнім — без індексу α.

Тепер покажемо, що, записавши впорядкування виразом

$$\overline{(\overline{(x, y), (\alpha, \beta)}', z), (\alpha, \beta)}',$$

отримаємо потрібну черговість виконання операторів. У цьому легко переконатись, якщо виконати такі перетворення:

1. За властивістю утворення пар розкриємо верхню операцію, отримаємо вираз

$$\{\overline{(x, y), (\alpha, \beta)}', \alpha\}, \{z, \beta\}.$$

2. Застосувавши до нього властивість внесення індексу під знак операції, одержимо формулу

$$\overline{(\{x, \alpha\}, \{y, \alpha\}), (\alpha, \beta)}', \{z, \beta\}.$$

3. З неї за властивістю індексування пар отримаємо вираз

$$\{\{x, \alpha\}, \alpha\}, \{\{y, \beta\}, \alpha\}, \{z, \beta\},$$

в якому оператор x має два індекси α, y — один і z — жодного. Тому за ознакою кількості α-індексів x виконуватиметься першим, y — другим і z — третім.

Черговість виконання операторів будь-якого впорядкування визначається за кількістю приписаних операторові всіх індексів (незалежно від їх значень), зв'язком з попередньо виконаним оператором і кількістю α-індексів. Тобто першим виконується той оператор, який має найбільше індексів. Якщо з максимальною кількістю індексів є більше ніж один оператор, то встановлюється, котрий з них безпосередньо зв'язаний операцією з попереднім найшвидше виконаним оператором. Якщо такого не було, то виконується оператор, який серед операторів з максимальною кількістю індексів має найбільше α-індексів.

Для опису розгалужень операторів використовуються операції альтернативного і виключного впорядкувань.

Б. Операцію альтернативного впорядкування операторів, призначену для такого опису розгалужень операторів та їх строгих впорядкувань, яким розгалуження не виключають одне одного.

Позначимо її $\overline{x,\ y}$, де $\overline{\quad}$ — знак операції, яким зручно охоплювати рознесені відносно один до одного оператори. Ця операція визначається такими властивостями:

ідемпотентність:

$$\overline{x,\ x} = x\ ,$$

комутативність:

$$\overline{x,\ y} = \overline{y,\ x};$$

асоціативність:

$$\overline{\overline{x,\ y},\ z} = \overline{x,\ \overline{y,\ z}};$$

поглинання порожнього оператора:

$$\overline{*,\ x} = x\ ,$$

внесення індексу під знак операції:

$$\overline{\overline{x,\ y},\ \varphi} = \overline{\{x,\ \varphi\},\{y,\ \varphi\}}.$$

В. Операцію виключного впорядкування операторів, призначену для вибору, який здійснюється за результатом виконання чи невиконання заданої умови тільки одного з двох операторів. Позначимо її $\overline{x,\ y,\ \vartheta}$, де ϑ — умова, виконання якої ідентифікується цифрою 1, а невиконання — цифрою 0 з її перекресленням ($\varnothing$) для наочної відміни від букви О; $\vdash\!\dashv$ — знак операції, яким зручно охоплювати оператори, записані поряд або рознесені на деяку відстань.

Визначається операція такими властивостями:

вибір оператора: $\overline{x,\ y,\ \vartheta} = \begin{cases} x, \text{ якщо } \vartheta = 1\ , \\ y, \text{ якщо } \vartheta = \varnothing\ ; \end{cases}$

вибір пари: $\overline{\{x,\ \varphi\},\ \{y,\ \varphi\}\ ,\vartheta} = \begin{cases} \{x,\ \varphi\}, \text{ якщо } \vartheta = 1\ , \\ \{y,\ \varphi\}, \text{ якщо } \vartheta = \varnothing\ ; \end{cases}$

поглинання оператора: $\overline{x,\ x,\ \vartheta} = x$;

внесення індексу під знак операції: $\overline{\{x,\ y,\ \vartheta,\ \varphi\}} = \overline{\{x,\ \varphi\},\{y,\ \varphi\},\ \vartheta}.$

вибір порожнього оператора:

$\overline{*,\ x,\ \vartheta} = \begin{cases} *, \text{ якщо } \vartheta = 1\ , \\ x, \text{ якщо } \vartheta = \varnothing\ . \end{cases}$ $\qquad \overline{x,\ *,\ \vartheta} = \begin{cases} x, \text{ якщо } \vartheta = 1\ , \\ *, \text{ якщо } \vartheta = \varnothing\ . \end{cases}$

Г. Операцію циклу, призначену для опису повторення за певною змінною операторів і їх впорядкувань: $C\ a\ P$, де C — знак операції; a — змінна, яка визначає кількість повторень; P — впорядкування операторів.

Поєднання виконання операцій впорядкувань описуються властивостями:

1. Альтернативне і строге впорядкування:

а) винесення переднього оператора за знак альтернативного впорядкування:

$$\overline{\overline{(x, y), (\alpha, \varphi)}, \overline{(x, z), (\alpha, \varphi)}} = \overline{(x, y, z), (\alpha, \varphi)};$$

б) винесення заднього оператора за знак альтернативного впорядкування:

$$\overline{\overline{(x, y), (\alpha, \varphi)}, \overline{(z, y), (\alpha, \varphi)}} = \overline{(x, z, y), (\alpha, \varphi)}.$$

2. Виключне і строге впорядкування:

а) винесення переднього оператора за знак виключного впорядкування:

$$\left[\begin{array}{l} \overline{(x,y), (\alpha, \varphi)}, \\ \overline{(x,s), (\alpha, \varphi)}, \\ \vartheta \end{array}\right. = \overline{(x, \left[\begin{array}{l} y), (\alpha, \varphi) \\ s, \\ \vartheta \end{array}\right.},$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{(\overline{(x,y), (\alpha, \varphi)}, z), (\alpha, \varphi)}, \\ \overline{(\overline{(x,s), (\alpha, \varphi)}, \vartheta), (\alpha, \varphi)}, \\ \vartheta \end{array}\right. = \overline{((x, \left[\begin{array}{l} y), (\alpha, \varphi), z), (\alpha, \varphi); \\ s, \vartheta \\ \vartheta \end{array}\right.}$$

б) винесення заднього оператора за знак виключного впорядкування:

$$\left[\begin{array}{l} \overline{(x,y), (\alpha, \varphi)}, \\ \overline{(z,y), (\alpha, \varphi)}, \\ \vartheta \end{array}\right. = \overline{\left.\begin{array}{l} (x, \\ z, \\ \vartheta \end{array}\right] y), (\alpha, \varphi)},$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{(x, \overline{(y, z), (\alpha, \varphi)}), (\alpha, \varphi)}, \\ \overline{(s, \overline{(\vartheta, z), (\alpha, \varphi)}), (\alpha, \varphi)}, \\ \vartheta \end{array}\right. = \overline{\left.\begin{array}{l} (x, (y, \\ s, \vartheta \\ \vartheta \end{array}\right] z), (\alpha, \varphi)), (\alpha, \varphi)}.$$

3. Операцій циклу, виключного і строгого впорядкувань:

а) внесення за переднім впорядкуванням під циклічну операцію операції виключного впорядкування:

$$\overline{Ca\,\overline{(S, U), (\alpha, \varphi)}, \ \overline{(S, P), (\alpha, \varphi)}}, \vartheta = Ca\,\overline{(S, \overline{U, P}, \vartheta), (\alpha, \varphi)}.$$

б) внесення за заднім впорядкуванням під циклічну операцію операції виключного впорядкування:

$$\overline{Ca\,\overline{(S, U), (\alpha, \varphi)}, \ \overline{(P, U), (\alpha, \varphi)}}, \vartheta = Ca\,\overline{(\overline{S, P, \vartheta}, U), (\alpha, \varphi)},$$

де P, S, U — впорядкування операторів, зв'язані операціями строгого, альтернативного і виключного впорядкувань.

1. Бешелев С., Гурвич Ф. Интенсификация науки: пути и особенности // Наука и жизнь. 1986. № 10. С. 62—66. 2. Красиков И.В. Некоторые ошибки компилятора //Компьютеры программы. 1993. № 7 (8). С. 45—47. 3. Криницкий А.А. Алгоритмы вокруг нас. М., 1984. 4. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1986. 5. Марков А.А. Теория алгоритмов. //Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова. М., 1951. Т. 38. С. 176—189. 6. Овсяк В.К. Упорядочения. К., 1986. 7. Post E.L. Finite combinatory processes-formulation 1.//JSL. 1936. V. 1. № 3. P. 103—105.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.96.