УДК 519.95

АНАЛІЗ МЕТОДІВ РЕДУКЦІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Ігор Стрепко, Богдана Федина

При проектуванні систем автоматичного керування складними поліграфічними об'єктами постає завдання пониження порядку вихідних моделей системи, тобто їх редукція.

У наш час відомо декілька десятків методів редукції і апроксимації лінійних динамічних систем. Щоб роз'яснити місце методів редукції, дамо коротку характеристику деяких з них. Існуючі методи редукції можна умовно розділити на шість груп:

1. Евристичні методи редукції. 2. Ідентифікаційні методи редукції. 3. Оптимізаційні методи редукції. 4. Апроксимація Паде. 5.Збереження інваріантів. 6. Викреслювання змінних.

Першу групу становлять евристичні методи, в яких спрощена модель базується на основі фізичних або інженерних міркувань. При цьому у вихідному математичному описі відкидаються деякі параметри або змінні, які майже не впливають на динаміку об'єкта. Наприклад, при моделюванні слідкуючих систем і сервоприводів звичайно приймаються рівними нулеві малі сталі часу електронних і електромеханічних підсилювачів, при моделюванні машин і механізмів нехтують високочастотними коливаннями та вібраціями і т.п. Головними недоліками евристичних методів є відсутність чіткої постановки задачі і складність апріорної оцінки якості редукції.

Друга група методів редукції опирається на використанні добре розвиненої теорії ідентифікації [2]. Згідно з ними в результаті фізичного або обчислювального експерименту отримують реакцію $y(t)$ вихідного об'єкта або його моделей на відому вхідну дію $u(t)$. Далі, опрацьовуючи осцилограми $y(t)$, $u(t)$ або масиви чисел, що їм відповідають, базуючися на одному із алгоритмів ідентифікації, визначають коефіцієнти диференційного рівняння або передаточної функції заданого порядку.

Основними недоліками цієї групи методів є висока обчислювальна складність і труднощі ідентифікації скалярних об'єктів вище третього порядку.

Для третьої групи методів характерна чітка постановка задачі редукції, при якій потрібно побудувати модель, оптимальну в розумінні заданого критерію. При цьому для спрощення найчастіше обмежуються розглядом стандартних вхідних сигналів у вигляді дельта-функцій або одиничного ступінчатого збурення, що приводить до задачі апроксимації дійсної або перехідної функції в часовій області, або до задачі апроксимації передаточної функції в частотній області.

Сформульовані таким чином задачі, як правило, не мають аналітичного розв'язку. При рішенні їх чисельними методами оптимізації з застосуванням ЕОМ також виникають серйозні труднощі навіть для систем невисокої розмірності.

Четверта група методів редукції названа на честь французького математика кінця минулого століття А. Паде. Вона також характеризується строгою математичною постановкою задачі, але вигідно відрізняється від методів третьої групи наявністю конструктивних алгоритмів рішення [3]. Принцип апроксимації Паде полягає у співставленні розкладів передаточних функцій початкової вихідної і редукованої моделей в ряди Тейлора і прирівнюванні, як можна більшого числа початкових коефіцієнтів цих розладів $\overline{\mu}_i = \mu_i$, $i = 0,1,2,\ldots$

Загальним недоліком методів, які базуються на апроксимації Паде, є можливість отримання внаслідок редукції нестійких і немінімальних фазових моделей для стійких мінімально-фазових систем.

П'ята група методів забезпечує редукцію із збереженням різних типів інваріантів. Моменти і марковські параметри, які зберігаються при апроксимації Паде, є окремими випадками інваріантів лінійних динамічних систем. Тому природньо розповсюдити ідею збереження інваріантів при редукції на інші види інваріантів. Це приводить до наступної постановки задачі, яка характерна для методів п'ятої групи.

Для вихідної системи n-ого порядку, яка характеризується набором інваріантів $I=(I_1,...,I_{2n})$, потрібно побудувати редуковану модель m-го порядку, яка забезпечує збереження перших $2m$ інваріантів з набору I.

Алгоритм вирішення цієї задачі такий же, як при класичній апроксимації Паде — за вхідним описом системи обчислюється набір інваріантів $I=(I_1,...,I_{2n})$, з нього викреслюється $2(n-m)$ інваріантів, а по тих, що залишилися відновлюється передаточна функція $\overline{W}(s)$ або інший математичний опис моделі. При цьому викреслювання пари інваріантів приводить до пониження порядку моделі на одиницю.

Найпростішим прикладом може служити пониження порядку передаточної функції

$$W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s + a_0}, \qquad (1)$$

шляхом викреслювання (прирівнювання до нуля) коефіцієнтів a_0, b_0 і скорочення отриманого дробу на s, внаслідок чого буде отримана передаточна функція

$$\overline{W}(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_2 s + b_1}{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2}+\ldots+a_1}. \qquad (2)$$

Вибираючи різні набори базисних інваріантів, будемо отримувати різні методи редукції, як відомі, так і нові.

Методи редукції шостої групи опираються на опис в просторі станів [1]. У відповідності з ними спочатку отримують опис

$$x = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \tag{3}$$

вихідної системи в деякому базисі простору станів, після чого редукція здійснюється шляхом простого відкидання частини змінних станів. Це еквівалентно викреслюванню відповідних рядків і стовпців матриць A,B,C опису (3) і зменшенню їх розмірів, що відразу приводить до отримання редукованих матриць $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$.

Якщо опису в просторі станів співставити структурну схему на суматорах і інтеграторах, тоді така редукція зводиться до усунення зі схеми інтеграторів, які відповідають змінним, що відкидаються, внаслідок чого зразу отримаємо структурну схему редукованої моделі. Це дозволяє використовувати для методів, які базуються на викреслюванні змінних станів, термін "структурна редукція".

Відзначимо, якщо в попередній групі методів відкидалась частина інваріантів системи (параметрів), то тут відкидається частина змінних (сигналів). У цьому і полягає суттєва різниця між методами п'ятої і шостої групи.

Велика кількість методів структурної редукції визначається вільним вибором базису в просторі станів, а також можливістю використання різних критеріїв для відбору параметрів , що викреслюються. Зокрема, можна відкидати змінні з меншою амплітудою або енергією, і які слабо впливають на дійсну функцію системи, або який небудь її інваріант і т.д.

Основною перевагою методів шостої групи є наглядність процедури редукції і простота отримання структурної схеми редукованої моделі. Недоліки пов'язані з порівняно високим ступенем евристичності при виборі базису в просторі станів і критерію відбору змінних, що зберігаються, а також можливістю отримання нестійких редуковних моделей. Останнього недоліку можна уникнути, якщо використовувати при редукції базиси, які характеризуються діагональністю одного з граміанів системи.

Проведений порівняльний аналіз методів редукції дає змогу правильно вибрати відповідну редуковану математичну модель системи при синтезі систем автоматичного керування складними об'єктами високої розмірності.

Література

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами.- М.: Наука, 1976. - 424с.

2. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред.Я.З.Цыпкина.- М.: Наука, 1991. - 432с.

3. *Броун В.М.* Анализ линейных инвариантных во времени систем.- М.: Машиностроение, 1966. - 436с.