УДК 519.95

МОДАЛЬНА РЕДУКЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

Богдана Федина

При проектуванні високоточних систем автоматичного керування складними поліграфічними об'єктами виникає потреба пониження порядку вихідних моделей системи, тобто їх редукція. Використання редукованих математичних моделей значно спрощує аналіз і синтез систем високої розмірності, а головне — апаратурну реалізацію замкнутих систем. При цьому можна досягти поліпшення техніко-експлуатаційних показників промислових систем. Розрахунки таких систем на ЕОМ потребують менших обчислювальних ресурсів.

Важливу групу методів редукції динамічних систем складають модальні методи.Визначальною рисою методів модальної редукції є збереження коренів характеристичного рівняння, які також називають полюсами передаточної функції (ПФ). Полюси системи (власні числа матриці А опису в просторі станів) визначають елементарні власні рухи (моди) системи — звідси термін "модальний". Полюси є найбільш істотною характеристикою динаміки системи. Вони безпосередньо відображають таку важливу властивість системи, як стійкість. У зв'язку з цим редукція із збереженням полюсів зберігає ряд істотних динамічних властивостей системи. Зокрема, якщо вихідна система була стійкою, тоді і редукована модель також буде стійкою.

Крім полюсів, в залежності від методу модальної редукції зберігаються ті чи інші додаткові інваріанти. Надалі розглядаються методи, в яких як додаткові інваріанти використовуються марковські параметри h_i і моменти дійсної функції μ_i.

Вибір для дослідження модальної редукції параметрів А.А.Маркова обумовлений тим, що марковські параметри є важливими числовими характеристиками системи.

Прикладне значення марковських параметрів пов'язане з простим способом їх експериментального отримання. При цифровій обробці сигналів він зводиться до збудження технічної системи, що досліджується, стандартним імпульсним впливом і реєстрації відліків її вихідних сигналів через рівні проміжки часу. Від отриманого масиву відліку, який представлений набором марковських параметрів системи, за допомогою стандартних алгоритмів може бути здійснений перехід до будь-якого іншого математичного опису системи, наприклад до ПФ або матриць A,B,C опису в просторі станів. Дана обставина обумовила популярність марковських параметрів та їх широке застосування при розв'язку задач ідентифікації, керування і контролю реальних об'єктів. Але при практичному застосуванні марковських параметрів потрібно мати на увазі, що вони добре описують високочастотну динаміку об'єктів (перехідні процеси) і значно менш точно — низькочастотну поведінку системи.

Якщо порядок редукованої моделі дорівнює m, тоді повний набір інваріантів, що зберігаються (основних та додаткових) дорівнює $2m$. Будь-які інші інваріанти у загальному випадку не зберігаються.

Коли кількість інваріантів, що зберігаються, і їх види визначені, необхідно конкретизувати , які дійсно m полюсів і m додаткових інваріантів з попередньо заданих $2n$ інваріантів необхідно зберегти.

В інженерній практиці найчастіше використовують один з двох видів редукції — низькочастотну або високочастотну. В обох випадках полюси системи впорядковують за величиною їх дійсної частини і при редукції відкидають або найменші (низькочастотна редукція), або найбільші (високочастотна редукція). У деяких випадках використовують впорядкування полюсів за величиною вкладу окремих мод у вихідний сигнал системи, зберігаючи при редукції моди, які дають найбільший вклад за вибраним критерієм.

Після цього, як вибрано набір інваріантів, що збереглися, проводиться власне і редукція, тобто відкидання решти інваріантів і перетворення ПФ системи або рівнянь станів до редукованого виду. Модальна редукція здійснюється з використанням канонічних форм (КФ), погоджених з вибраним набором інваріантів. В усіх розглянутих нижче КФ матриця A опису в просторі станів трикутна. Це гарантує збереження власних чисел при побудові редукованої моделі, яка отримується викреслюванням змінних станів КФ або доданків ПФ, які відповідають інваріантам, що відкидаються. В результаті редукована модель буде мати m змінних станів, зберігати m полюсів і m додаткових інваріантів вихідної системи.

Нехай вихідна система задана ПФ виду

$$W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s + a_0}, \tag{1}$$

і відома множина $\lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ її полюсів. Для виконання редукції із збереженням полюсів і марковських параметрів $W(s)$ зображається у вигляді (λ_i — дійсні).

$$W(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}. \tag{2}$$

Тут вектор-рядок C коефіцієнтів $c_i,\ i = \overline{1,n}$ визначається за формулою

$$C = b_H L_1. \tag{3}$$

де $b_H = [b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0]$ — вектор-рядок коефіцієнтів полінома чисельника ПФ, а L_1 — верхньотрикутна матриця, ненулеві елементи якої l_{ij} можуть бути визначені із наступних рекурентних відношень:

$$\begin{aligned} &l_{ij} = l_{i+1,j+1} + \lambda_j l_{i+1,j}, \quad i = \overline{n-1,1}, \quad j = \overline{n,2}, \quad j > i \\ &l_{nn} = 1, \quad l_{n+1,j} = l_{i,n+1} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Система (2) може бути реалізована як у формі керування, так і в формі спостереження. Структура, що відповідає формі управління, і сигнальний граф показані на рис. 1.

Для опису системи (2) в просторі станів [1] приймемо за змінні стани $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вихідні сигнали інтеграторів (рис.1). Виписуючи диференційні рівняння для кожного інтегратора, отримаємо систему рівнянь в матричній формі запису

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{5}$$

де

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_n \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \quad C = [c_1 \ldots c_n]. \tag{6}$$

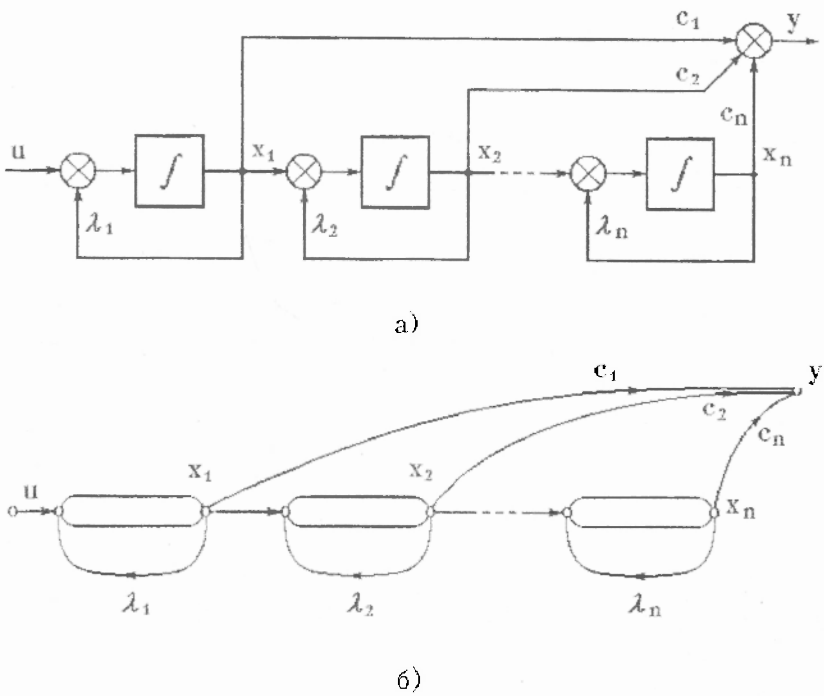

Рис. 1. Структурна схема (а) і сигнальний граф (б) канонічної форми

Отримана КФ називається керованою субдіагональною (дводіагональною) КФ. Як випливає з (3), кількість ненульових елементів в матриці C залежить від степеня чисельника ПФ і для систем, що спостерігаються, в загальному випадку дорівнює $g+1$, де g — степінь чисельника.

Нульові елементи розташовані на початку вектора-рядка C. З (3), (4) також видно, що якщо змінювати порядок нумерації полюсів λ_i в КФ в порівнянні з початково вибраним, коефіцієнти c_i також змінять свої значення і буде отриманий інший варіант субдіагональної КФ. Очевидно, загальне число таких варіантів не перевищує $n!$. Відзначимо, що вид матриць (6) залишається без змін і при наявності комплексних полюсів, якщо нема необхідності в запису системи в дійсній формі. В останньому випадку матриця A набуває тридіагональну структуру [2].

Марковські параметри для субдіагональної КФ знаходять із виразу

$$h = cR, \tag{7}$$

де h — вектор-рядок перших n-марковських параметрів, $R = \left[b, Ab, \dots, A^{n-1}b\right]$ — матриця досяжності системи (6). Для субдіагональної КФ матриця R — верхньотрикутна, причому кожен i-ий марковський параметр залежить тільки від перших i полюсів системи. Отже, при редукції викреслюванням останніх n-m змінних станів в системі (5) з матрицями форми (6), або відкиданням останніх доданків ПФ (2) без зміни залишаються перші m полюсів системи і перші m її марковських параметрів. Збереження перших марковських параметрів забезпечує хороше співпадання початкових відрізків дійсної і перехідної функцій вихідної і редукованої систем.

Зберігаючи ті чи інші полюси вихідної системи, можна задовільнити будь-яку додаткову вимогу до редукованої системи. Наприклад, це може бути умова близькості нульових моментів вихідної і редукованої систем [3]. Із формули для моментів можна записати

$$m_0 = \mu_0 = \frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_1\lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(-1)^{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} m_{0j}. \tag{8}$$

Величина m_{0j} залежить від нумерації полюсів λ_i в КФ. Отже, можна отримати таке розташування λ_i, щоб нульовий момент редукованої системи $\overline{m_0} = \sum_{j=1}^{m} m_{0j}$, був максимально близький до нульового моменту вихідної системи m_0. Це забезпечить близькість значень, що встановились, вихідної і редукованої системи.

Проведемо редукцію системи з ПФ форми

$$W(s) = \frac{2s^2 + 21s + 10{,}5}{s^3 + 13s^2 + 32s + 20}, \text{ де } \lambda = \{-1, -2, -10\},$$

із збереженням полюсів і марковських параметрів при $m=2$.

У відповідності із (2) представлення ПФ $W(s)$ набере вигляду

$$W(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{3}{(s+1)(s+2)}+\frac{0{,}5}{(s+1)(s+2)(s+10)}. \qquad (9)$$

Будемо шукати полюс, що відкидається, таким чином, щоб нульовий момент системи змінювався мінімально. Неважко побачити, що необхідно відкинути полюс $\lambda_3=10$, тобто третю складову розкладу (9).

Тоді ПФ редукованої системи матиме вигляд

$$\overline{W}(s)=\frac{2s+1}{s^2+3s+2},$$

а матриці $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ рівні

$$\overline{A}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix},\quad \overline{B}=\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix},\quad \overline{C}=[2,-3].$$

На рис.2 зображено графіки ПФ вихідної і редукованої системи. Ми бачимо, що є хороше співпадання кривих на їх початкових ділянках, тоді як значення, що встановились не співпадають.

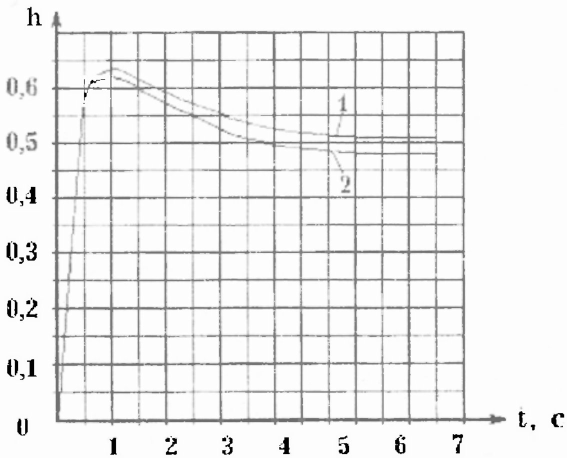

Рис. 2. Перехідні функції вихідної (1) і редукованої (2) моделей прикладу

З розглянутого прикладу видно, що перехідні характеристики вихідної і редукованої моделі мало змінились, однак технічна реалізація такої моделі значно спрощується. Це слід враховувати при синтезі складних динамічних систем.

Література

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами.- М.: Наука, 1976. - 424с.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.- М.: Наука, 1967. - 417с.

3. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем / Пер. с англ. Под ред. Г.С. Поспелова.- М.: Наука, 1970. - 522с.