УДК 612.01

В.Р. Пасіка

КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ З ГРУПАМИ АССУРА $III - V$ ВИДІВ

Кінематичне дослідження механізмів – необхідний етап у розробці нових машин і в поліпшенні роботи існуючих. Величини кінематичних характеристик механізму (переміщення, швидкість, пришвидшення) потрібні як для визначення положень механізму, так і для наступного динамічного дослідження. Очевидно, що від точності кінематичних характеристик значною мірою залежатиме і вся подальша розробка нових чи удосконалення існуючих машин. Ось чому сьогодення вимагає від конструкторів знання більш точних методів кінематичного дослідження.

Пропонована робота є продовженням роботи [див.: Пасіка В.Р. Кінематика важільних механізмів з групами Ассура I і II видів: Наукові записки. Львів: УАД. 2001. Вип.2. С. 12–16], де розглядається метод проектування планів, що, на думку автора, дає можливість отримати готові лаконічні аналітичні залежності для визначення кінематичних характеристик ланок механізму. Одержані вирази легко програмуються і не вимагають від дослідника глибоких знань у програмуванні.

У цілому результати цієї праці можуть використовуватися при кінематичному дослідженні механізмів II класу.

Група Ассура III виду

Група Ассура III виду містить внутрішню поступальну кінематичну пару L і зовнішні обертальні кінематичні пари M і H (рис.1). Приймаємо кут коліна куліси $\angle MTL = 90^\circ$.

При дослідженні цієї групи відомі:

координати та вектори швидкостей і пришвидшень зовнішніх кінематичних пар M і H: x_M, y_M, x_H, y_H, $\vec{v}_M(v_M, \gamma_m)$, $\vec{v}_H(v_H, \gamma_h)$, $\vec{a}_M(a_M, \psi_m)$, $\vec{a}_H(a_H, \psi_h)$; ексцентриситет куліси $e = l_{MT}$, який може бути $e > 0$ або $e < 0$; геометричні розміри j-ї ланки HL: $l_j = l_{HL}$; φ_j – кут нахилу вектора $\vec{l}_j$ до осі Mx_1;

Потрібно визначити:

кут нахилу куліси $\varphi_i \equiv \varphi_k$, її кутові швидкості $\omega_i = \omega_k$ і пришвидшення $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_k$; положення повзуна L відносно куліси: $l_k = l_i$, відносні швидкість $_T\vec{v}_L\left({}_T v_L, \gamma_{li}\right)$ і пришвидшення $_T\vec{a}_L\left({}_T a_L, \psi_{li}\right)$ повзуна L відносно куліси.

Визначення положень ланок

Через зовнішню кінематичну пару M проводимо додаткову рухому праву систему координат x_1My_1 таким чином, щоб вісь Mx_1 була паралельна до куліси TL і спрямована в бік від точки T до точки L.

Закриємо векторний контур $\vec{l}_M + \vec{e} + \vec{l}_i = \vec{l}_H + \vec{l}_j$ і спроектуємо його на осі координат x_1My_1:

$$x_1 : x_{M_1} + l_i = x_{H_1} + l_j \cos\varphi_{j1};$$

$$y_1 : y_{M_1} + e \cdot sign(ze) = y_{H_1} + l_j \sin\varphi_{j1},$$

де $ze = +1$ – при обході контуру MTL за стрілкою годинника і $ze = -1$ – при обході контуру проти стрілки годинника.

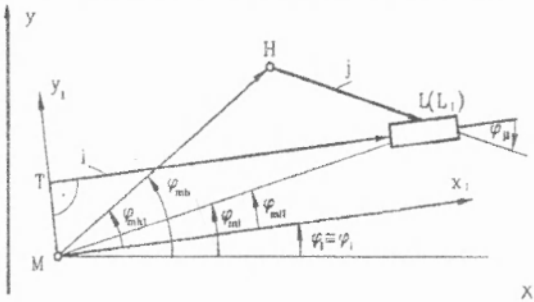

Рис. 1. Група Ассура II класу III виду

Використовуючи рівняння перетворення координат, виразимо координати точок $M(x_{M_1},\ y_{M_1})$ і $H(x_{H_1},\ y_{H_1})$ в рухомій системі координат x_1My_1 через координати цих точок у нерухомій системі xOy:

$$x_{M_1} = x_M\ cos\varphi_i + y_M\ sin\varphi_i\ ; \quad y_{M_1} = -x_M\ sin\varphi_i + y_M\ cos\varphi_i;$$

$$x_{H_1} = x_H\ cos\varphi_i + y_H\ sin\varphi_i\ ; \quad y_{H_1} = -x_H\ sin\varphi_i + y_H\ cos\varphi_i$$

й отримані вирази підставимо у вищенаведену систему:

$$x_M\ cos\varphi_i + y_M\ sin\varphi_i + l_i = x_H\ cos\varphi_i + y_H\ sin\varphi_i + l_j\ cos\varphi_{j1},$$

$$-x_M\ sin\varphi_i + y_M\ cos\varphi_i + e\cdot sign(ze) = \\ = -x_H\ sin\varphi_i + y_H\ cos\varphi_i + l_j\ sin\varphi_{j1}\ .$$

Після алгебраїчно-тригонометричних перетворень дістанемо квадратне рівняння відносно l_i:

$$l_i^2 - 2l_j l_i\ cos\varphi_{ji} + C_k = 0,$$

де $C_k = l_j^2 + e^2 - 2el_j\ sin\varphi_{j1} sign(ze) - (x_M - x_H)^2 - (y_M - y_H)^2$.

Розв'язок рівняння:

$$l_i = l_j\ cos\varphi_{j1} + \sqrt{l_j^2\ cos^2\varphi_{j1} - C_k}\ . \qquad (1)$$

Перед квадратним коренем маємо знак „+", оскільки величина l_i завжди більша за нуль.

Згідно з рис.1, кут нахилу куліси φ_i можна подати як $\varphi_i = \varphi_{mh} - \varphi_{mh_1}$, де $\varphi_{mh} = arctg\dfrac{y_H - y_M}{x_H - x_M}$ – кут нахилу вектора $\overline{MH}$ до осі Ox; $\varphi_{mh_1} = arctg\dfrac{e \cdot sign(ze) - l_j \sin\varphi_{j1}}{l_i - l_j \cos\varphi_{j1}}$ – кут нахилу вектора $\overline{Mh}$ до осі Mx_1.

Або

$$\varphi_i = arctg\frac{y_H - y_M}{x_H - x_M} - arktg\frac{e \cdot sign(ze) - l_j \sin\varphi_{j1}}{l_i - l_j \cos\varphi_{j1}}. \quad (2)$$

При визначенні швидкостей і пришвидшень потрібно знати відстань між точками M і L, а також кут нахилу вектора $\overline{ML}$ до осі Ox: $ML = \sqrt{e^2 + l_i^2}$; $\varphi_{ml} = \varphi_i + arktg\dfrac{e \cdot sign(ze)}{l_i}$.

Таким чином, положення ланок групи визначені.

Визначення швидкостей

Виражаємо у векторній формі швидкість v_{L_i} внутрішньої кінематичної пари L_i через швидкості v_M, v_H зовнішніх кінематичних пар M і H $\underline{\underline{\vec{v}}}_H + \underline{{}_H\vec{v}_L + {}_L\vec{v}_{L_i}} = \underline{\underline{\vec{v}}}_M + {}_M\underline{\vec{v}}_{L_i}$ і проектуємо векторне рівняння на осі координат xOy:

$$x: v_H \cos\gamma_h + {}_H v_L \cos\gamma_{lh} + {}_L v_{L_i} \cos\gamma_{l_i l} =$$
$$= v_M \cos\gamma_m + {}_M v_{L_i} \cos\gamma_{l_i m};$$

$$y: v_H \sin\gamma_h + {}_H v_L \sin\gamma_{lh} + {}_L v_{L_i} \sin\gamma_{l_i l} =$$
$$= v_M \sin\gamma_m + {}_M v_{L_i} \sin\gamma_{l_i m},$$

де ${}_H v_L = \omega_j l_j$ – швидкість точки L відносно точки H; ${}_L v_{L_i}$ – швидкість куліси MTL відносно повзуна L;

${}_{M}v_{L_i} = \omega_i l_{ML}$ – швидкість куліси в точці L_i відносно точки M;

γ_{llh}, $\gamma_{l_i m}$ – кути нахилу векторів швидкостей, відповідно, ${}_{H}\vec{v}_{L}$ і ${}_{M}\vec{v}_{L_i}$.

Оскільки швидкості ${}_{H}v_{L}$, ${}_{M}v_{L_i}$ виражаються через невідому кутову швидкість куліси ω_i, то остання система рівнянь має дві невідомі величини ${}_{L}v_{L_i}$ і ω_i.

З врахуванням сказаного розв'язок системи матиме вигляд

$$\omega_i = \frac{|v_M|\,sin(\gamma_m - \varphi_i) - |v_H|\,sin(\gamma_h - \varphi_i)}{l_j\,cos(\varphi_j - \varphi_i) - l_{ML}\,cos(\varphi_{ml} - \varphi_i)};$$

$$ {}_{L}v_{L_i} = \frac{l_j\left[|v_M|cos(\gamma_m - \varphi_j) - |v_H|cos(\gamma_h - \varphi_j)\right] -}{l_j\,cos(\varphi_j - \varphi_i) - l_{LM}\,cos(\varphi_{ml} - \varphi_i)} \frac{- l_{LM}\left[|v_M|cos(\gamma_m - \varphi_{ml}) - |v_H|cos(\gamma_h - \varphi_{ml})\right]}{l_j\,cos(\varphi_j - \varphi_i) - l_{LM}\,cos(\varphi_{ml} - \varphi_i)}. \quad (3)$$

Коли швидкість куліси відносно повзуна додатна (${}_{L}v_{L_i} > 0$), то кут нахилу вектора цієї швидкості до осі абсцис буде дорівнювати $\gamma_{l_i l} = \varphi_i$, якщо ${}_{L}v_{L_i} < 0$ то $\gamma_{l_i l} = \varphi_i + \pi$.

Визначення пришвидшень

Виражаємо пришвидшення a_{L_i} внутрішньої кінематичної пари L_i через пришвидшення a_M і a_H зовнішніх кінематичних пар M і H і, спроектувавши отримане векторне рівняння $\underline{\underline{\vec{a}}}_M + {}_{M}\underline{\underline{\vec{a}}}^n_{L_i} + {}_{M}\underline{\vec{a}}^{\tau}_{L_i} = \underline{\underline{\vec{a}}}_H + {}_{H}\underline{\underline{\vec{a}}}^n_{L} + {}_{H}\underline{\underline{\vec{a}}}^{\tau}_{L} + {}_{L}\underline{\underline{\vec{a}}}^k_{L_i} + {}_{L}\underline{\vec{a}}_{L_i}$ на осі координат xOy, розв'язуємо отриману систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих кутової швидкості куліси ε_i та відносного пришвидшення $a^r_{L_i}$:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{l_i - l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)} \Big[|a_H| \sin(\psi_h - \varphi_i) + \omega_i^2 l_j \sin(\varphi_i - \varphi_j) + 2\omega_i \cdot v_{L_i} +$$

$$+ |a_M| \sin(\varphi_i - \psi_m) + \omega_i^2 e \cdot sign\,(ze) \Big] ;$$

$$a^r_{L_i} = \frac{l_{LM}}{l_i - l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)} \Big[- |a_H| \cos(\psi_h - \varphi_{ml}) + \omega_i^2 l_j \cos(\varphi_i - \varphi_{mh}) +$$

$$+ 2\omega_i \cdot v_{L_i} \sin(\varphi_i - \varphi_{mh}) + |a_M| \cos(\psi_m - \varphi_{mh}) - \omega_i^2 l_{ml} \cos(\varphi_{ml} - \varphi_{mh}) \Big]. \quad (4)$$

Таким чином, для групи Ассура II класу III виду кінематичні характеристики визначені.

Група Ассура IV виду

Група Ассура IV виду має внутрішню обертальну кінематичну пару L і зовнішні поступальні пари M і H (рис.2).

При дослідженні цієї групи відомі:

координати, швидкості і пришвидшення довільних точок Z_k і Z_q на напрямних $k-k$ і $q-q$ повзунів M і H : x_{Z_k}, y_{Z_k}, $\vec{v}_{Z_k}$, $\vec{a}_{Z_k}$, x_{Z_q}, y_{Z_q}, $\vec{v}_{Z_q}$, $\vec{a}_{Z_q}$, положення напрямних повзунів M і H – ξ_k і ξ_q; кутові швидкості і пришвидшення напрямних – ω_k, ε_k і ω_q, ε_q; лінійні і кутові розміри ланок – $l_i = l_{ML}$, $l_j \equiv l_{HL}$, φ_{i_k}, φ_{j_q} .

Потрібно визначити:

положення, швидкість і пришвидшення повзунів відносно їхніх напрямних – $\vec{l}_{Z_kM}$, $\vec{l}_{Z_qH}$, $\vec{v}_{MM_k}$, $\vec{v}_{HH_q}$, $\vec{a}_{MM_k}$, $\vec{a}_{HH_q}$; координати повзунів, їх швидкості і пришвидшення в системі координат xOy – x_M, y_M, x_H, y_H, $\vec{v}_M$, $\vec{v}_H$, $\vec{a}_M$, $\vec{a}_H$.

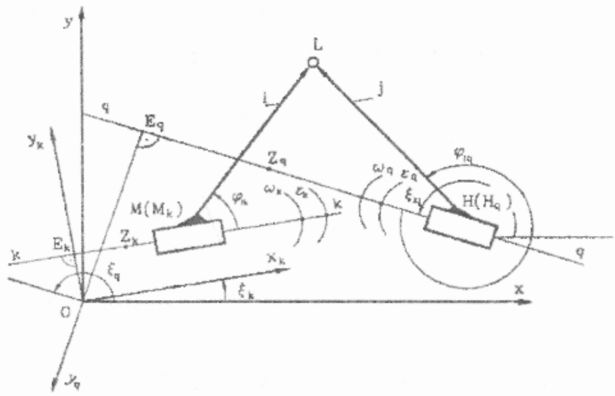

Рис. 2. Група Ассура II класу IV виду

Визначення положень

Проводимо додаткові системи координат $x_k O y_k$ і $x_q O y_q$ так, щоб додатний напрям осей Ox_k і Ox_q збігався з додатним напрямом проекцій відповідних векторів $\vec{l}_i$ і $\vec{l}_j$ на ці осі. Осі ординат отримаємо поворотом осей абсцис на кут $90°$ проти стрілки годинника.

Записавши рівняння замкнутості векторного контуру для групи

$$\vec{l}_{Z_k} + \vec{l}_{Z_k M} + \vec{l}_i = \vec{l}_{Z_q} + \vec{l}_{Z_q H} + \vec{l}_j$$

і спроектувавши його на осі координат xOy, розв'язуємо отриману систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих переміщень:

$$l_{Z_k M} = \left[\left(y_{Z_q} - y_{Z_k}\right)\cos\xi_q - \left(x_{Z_q} - x_{Z_k}\right)\sin\xi_q + l_j \sin\varphi_{jq} + \right.$$
$$\left. + l_i \sin\left(\xi_q - \xi_k - \varphi_{ik}\right)\right] / \sin\left(\xi_k - \xi_q\right);$$

$$l_{HZ_q} = \left[\left(y_{Z_q} - y_{Z_k}\right)\cos\xi_k - \left(x_{Z_q} - x_{Z_k}\right)\sin\xi_k + \right.$$
$$\left. + l_j \sin\left(\varphi_{jq} + \xi_q - \xi_k\right) - l_i \sin\left(\varphi_{ik}\right)\right] / \sin\left(\xi_k - \xi_q\right). \quad (5)$$

На практиці часто зустрічаються механізми, в яких група Ассура IV виду застосовується у спрощеному вигляді (рис.3).

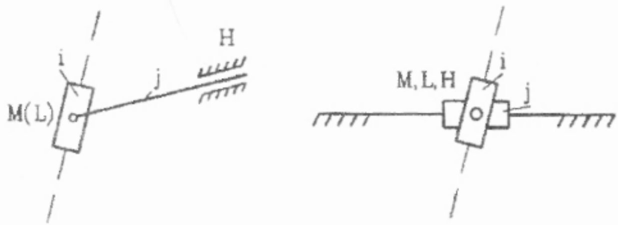

Рис. 3. Спрощена група Ассура IV виду (два варіанти)

Для таких груп величини $l_i = l_j = 0$, а одна з напрямних нерухома. Тут достатньо визначити величину $l_{Z_k M}$ при нерухомій напрямній повзуна H або $l_{Z_k H}$ при нерухомій напрямній повзуна M:

$$l_{Z_k M} = \frac{\left(y_{Z_q} - y_{Z_k}\right)\cos\xi_q - \left(x_{Z_q} - x_{Z_k}\right)\sin\xi_q}{\sin\left(\xi_k - \xi_q\right)};$$

$$l_{Z_2 H} = \frac{\left(y_{Z_q} - y_{Z_k}\right)\cos\xi_k - \left(x_{Z_q} - x_{Z_k}\right)\sin\xi_k}{\sin\left(\xi_k - \xi_q\right)}. \quad (6)$$

При нерухомій напрямній повзуна за точку Z потрібно взяти точку E перетину напрямної з перпендикуляром, опущеним на неї з центра нерухомої системи координат O (рис.2). Тоді координати додаткових точок $Z_{k,q}$ будуть:

$$x_{Z_{k,q}} \equiv x_{E_{k,q}} = e\cos\left[sign(ze)\frac{\pi}{2} + \xi\right];$$

$$y_{Z_{k,q}} \equiv y_{E_{k,q}} = e\sin\left[sign(ze)\frac{\pi}{2} + \xi\right],$$

де $e = OE_k$, або $e = OE_q$; $ze = 1$ – якщо ордината точки $E_{k,q}$ у відповідній додатковій системі координат більша за нуль, тобто, якщо $y_{Ek,q} > 0$; $ze = -1$ – якщо $y_{Ek,q} < 0$.

У нерухомій системі координат координати повзунів будуть:

$$x_M = x_{Z_k} + l_{Z_kM}\cos\xi_k, \qquad y_M = y_{Z_k} + l_{Z_kM}\sin\xi_k;$$

$$x_H = x_{Z_q} + l_{Z_qM}\cos\xi_q, \qquad y_H = y_{Z_q} + l_{Z_qM}\sin\xi_q.$$

Визначення швидкостей

Виражаємо у векторній формі швидкість внутрішньої кінематичної пари L через швидкості зовнішніх пар M і H і записуємо векторне рівняння зміни швидкостей групи:

$$\underset{=Z_k}{\vec{v}} + {}_{Z_k}\underset{=M_k}{\vec{v}} + {}_{M}\underset{=L}{\vec{v}} + {}_{M_k}\underset{-M}{\vec{v}} = \underset{=Z_q}{\vec{v}} + {}_{Z_q}\underset{=H_q}{\vec{v}} + {}_{H}\underset{=L}{\vec{v}} + {}_{H_q}\underset{-H}{\vec{v}}.$$

Проектуємо дане векторне рівняння на осі координат і розв'язуємо отриману систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих швидкостей:

$$\begin{aligned} {}_{M_k}v_M = \Big[&v_{Z_q}\sin(\gamma_{z_k} - \xi_q) + \omega_q l_{Z_qH} + \omega_q l_j\cos\varphi_{j_q} + \\ &+ v_{Z_k}\sin(\xi_q - \gamma_{z_k}) - \omega_k l_{Z_kM}\cos(\xi_k - \xi_q) - \\ &- \omega_k l_i\cos(\varphi_{i_k} + \xi_k - \xi_q)\Big] / \sin(\xi_k - \xi_q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{H_q}v_H = \Big[&v_{Z_q}\sin(\gamma_{z_k} - \xi_k) + \omega_q l_{Z_qH}\cos(\xi_q - \xi_k) + \\ &+ \omega_q l_q\cos(\varphi_{j_q} + \xi_q - \xi_k) + v_{Z_k}\sin(\xi_k - \gamma_{z_k}) - \\ &- \omega_k l_{Z_kM} - \omega_k l_i\cos\varphi_{i_k}\Big] / \sin(\xi_k - \xi_q). \end{aligned} \tag{7}$$

Якщо швидкості повзунів M і H відносно їхніх напрямних будуть додатними $\left({}_{M_k}v_M > 0,\ {}_{H_q}v_H > 0\right)$, то кути нахилу векторів цих швидкостей дорівнюватимуть, відповідно, $\gamma_{mm_k} = \xi_k$, $\gamma_{hh_q} = \xi_q$. Якщо ${}_{M_k}v_M < 0$, ${}_{H_q}v_H < 0$, то $\gamma_{mm_k} = \xi_k + \pi$, $\gamma_{hh_q} = \xi_q + \pi$.

У випадку спрощеної групи (рис.3) залежності (7) набувають вигляду

$$ {}_{M_k}v_M = \frac{v_{Z_k}\, sin\left(\xi_q - \gamma_{z_k}\right) - \omega_k l_{Z_k M}\, cos\left(\xi_k - \xi_q\right)}{sin\left(\xi_k - \xi_q\right)}; $$

$$ {}_{H_q}v_H = \frac{v_{Z_k}\, sin\left(\xi_k - \gamma_{z_k}\right) - \omega_k l_{Z_k M}}{sin\left(\xi_k - \xi_q\right)}. \qquad (8) $$

Визначення пришвидшень

Виражаємо у векторній формі пришвидшення $\vec{a}_L$ внутрішньої кінематичної пари L через пришвидшення $\vec{a}_M$ і $\vec{a}_H$ зовнішніх кінематичних пар M і H і записуємо векторне рівняння, яке описує зміну пришвидшень групи Ассура II класу IV виду:

$$ \underline{\underline{\vec{a}}}_{Z_k} + {}_{Z_k}\underline{\underline{\vec{a}}}^{n}_{M_k} + {}_{Z_k}\underline{\underline{\vec{a}}}^{\tau}_{M_k} + {}_{M}\underline{\underline{\vec{a}}}^{n}_{L} + {}_{M}\underline{\underline{\vec{a}}}^{\tau}_{L} + {}_{M_k}\underline{\underline{\vec{a}}}^{k}_{M} + {}_{M_k}\underline{\vec{a}}^{\tau}_{M} = $$

$$ = \underline{\underline{\vec{a}}}_{Z_q} + {}_{Z_q}\underline{\underline{\vec{a}}}^{n}_{H_q} + {}_{Z_q}\underline{\underline{\vec{a}}}^{\tau}_{H_q} + {}_{H}\underline{\underline{\vec{a}}}^{n}_{L} + {}_{H}\underline{\underline{\vec{a}}}^{\tau}_{L} + {}_{H_q}\underline{\underline{\vec{a}}}^{k}_{H} + {}_{H_q}\underline{\vec{a}}^{r}_{H}. $$

Вектори, підкреслені двома лініями, відомі за модулем і напрямком. Для векторів, підкреслених однією лінією, відома лише лінія дії.

Проектуємо векторне рівняння на осі координат і розв`язуємо отриману систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих відносних пришвидшень:

$$
\begin{aligned}
{}_{M_k}a_M^r = \frac{1}{sin(\xi_k - \xi_q)}\Big[& a_{Z_k}\,sin(\xi_q - \psi_{z_k}) + \omega_k^{\,2} l_{Z_k M_k}\,sin(\xi_k - \xi_q) - \\
& - \varepsilon_k l_{Z_k M_k}\,cos(\xi_k - \xi_q) + \omega_k^2 l_i\,sin(\xi_k + \varphi_{i_k} - \xi_q) - \\
& - \varepsilon_k l_i\,cos(\xi_k + \varphi_{i_k} - \xi_q) - 2\omega_k \cdot {}_{M_k}v_M\,cos(\xi_k - \xi_q) - \\
& - a_{Z_q}\,sin(\xi_q - \psi_{z_q}) + \varepsilon_q l_{Z_q H_q} - \omega_j^2 l_j\,sin\varphi_{j_q} + \\
& + \varepsilon_j l_j\,cos\varphi_{j_q} + 2\omega_j \cdot {}_{H_q}v_H \Big];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{H_k}a_H^{\,r} = \frac{1}{sin(\xi_k - \xi_q)}\Big[& a_{Z_k}\,sin(\xi_k - \psi_{z_k}) - \\
& - \varepsilon_k l_{Z_k M_k} + \omega_k^{\,2} l_i\,sin\varphi_{j_k} - \varepsilon_i l_i\,cos\varphi_{i_i} - \\
& - 2\omega_k \cdot {}_{M_k}v_M - a_{Z_q}\,sin(\xi_k - \psi_{z_q}) + \\
& + \omega_q^2 l_{Z_q H_q}\,sin(\xi_k - \xi_q) + \varepsilon_q l_{Z_q H_q}\,cos(\xi_k - \xi_q) \\
& + \omega_q^2 l_j\,sin(\xi_k - \varphi_{j_q} - \xi_q) + \\
& + \varepsilon_q l_j\,cos(\xi_k - \varphi_{j_q} - \xi_q) + 2\omega_q \cdot {}_{H_q}v_H\,cos(\xi_k - \xi_q)\Big].
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Якщо пришвидшення повзунів M і H відносно їхніх напрямних будуть додатними $\left({}_{M_k}a_M^r > 0,\ {}_{H_q}a_H^r > 0\right.$, то кути нахилу векторів цих пришвидшень дорівнюватимуть, відповідно, $\psi_{mm_k}^r = \xi_k$, $\psi_{hh_q}^r = \xi_q$. Якщо ${}_{M_k}a_M^r < 0$, ${}_{H_q}a_H^r < 0$, то $\psi_{mm_k}^r = \xi_k + \pi$, $\psi_{hh_q}^r = \xi_q + \pi$.

Для спрощеної групи Ассура (рис.3) вирази (9) набувають вигляду

$$
{}_{M_k}a_M^r = \frac{a_{Z_k}\,sin(\xi_q - \psi_{z_k}) - \varepsilon_k l_{Z_k M_k}\,cos(\xi_k - \xi_q) -}{sin(\xi_k - \xi_q)}
$$

$$
\frac{-2\omega_k \cdot {}_{M_k}v_M\,cos(\xi_k - \xi_q)}{sin(\xi_k - \xi_q)} + \omega_k^2 l_{Z_k M_k};
$$

$$ {}_{H_q}a_H^r = \frac{a_{Z_k}\sin\left(\xi_k - \psi_{z_k}\right) - \varepsilon_k l_{Z_k M_k} - 2\omega_k \cdot {}_{M_k}v_M}{\sin\left(\xi_k - \xi_q\right)} . \qquad (10) $$

Таким чином, кінематичні характеристики для групи Ассура II класу IV виду визначені.

Група Ассура V виду

При дослідженні механізмів з групами Ассура II класу V виду (рис.4) відомі:

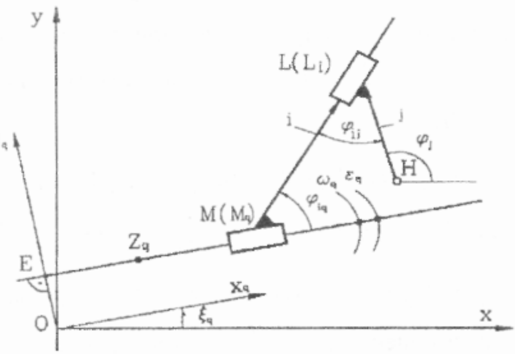

Рис. 4. Група Ассура II класу V виду

координати, швидкості і пришвидшення зовнішньої кінематичної пари H: x_H, y_H, $\vec{v}_H\left(v_H, \gamma_h\right)$, $\vec{a}_H\left(a_H, \psi_h\right)$; координати, швидкості і пришвидшення довільної точки Z_q на напрямній повзуна M: x_{Zq}, y_{Zq}, $\vec{v}_{Zq}\left(v_{Zq}, \gamma_{z_q}\right)$, $\vec{a}_{Zq}\left(a_{Zq}, \psi_{z_q}\right)$; положення, кутова швидкість і пришвидшення напрямної: ξ_q, ω_q, ε_q; геометричні розміри ланок групи: l_j, φ_{l_q}, φ_{ji}.

Потрібно визначити:

положення, швидкість і пришвидшення повзунів M і L відносно їхніх напрямних: $l_{ZM}; l_{L_iM}$, ${}_{M_q}\vec{v}_M$, ${}_{M}\vec{v}_L$, ${}_{M_q}\vec{a}_M$, ${}_{M}\vec{a}_L$;

положення, швидкість і пришвидшення повзунів M і L в нерухомій системі координат xOy: x_M, y_M, x_L, y_L, $\vec{v}_M(v_M, \gamma_m)$, $\vec{v}_L(v_L, \gamma_l)$, $\vec{a}_M(a_M, \psi_m)$, $\vec{a}_L(a_L, \psi_l)$.

Визначення положень ланок

Проводимо додаткову систему координат $x_q O y_q$ таким чином, щоб додатний напрям осі Ox_q збігався з додатним напрямком проекції вектора $\vec{l}_{ML}$ на цю вісь. Вісь Oy_q отримаємо поворотом осі Ox_q на 90° проти стрілки годинника. Запишемо рівняння замкнутості векторного контуру для групи $\vec{l}_{Z_q} + \vec{l}_{MZ_q} + \vec{l}_{ML_i} = \vec{l}_H + \vec{l}_j$ і спроектуємо його на осі координат xOy:

$$x: \qquad x_{Z_q} + l_{MZ_q} \cos\xi_q + l_{ML_i} \cos(\xi_q + \varphi_{iq}) = x_H + l_j \cos\varphi_j;$$

$$y: \qquad y_{Z_q} + l_{MZ_q} \sin\xi_q + l_{ML_i} \sin(\xi_q + \varphi_{iq}) = y_H + l_j \sin\varphi_j,$$

де $\varphi_j = \xi_q + \varphi_{iq} + \varphi_{ij}$. Отриману систему рівнянь відносно невідомих переміщень l_{MZ_q} і l_{ML_i} зводимо до канонічного виду і розв'язуємо методом Крамера:

$$l_{MZ_q} = \left[{}_{HZ_q} \sin\left(\xi_q + \varphi_{i_q} - arctg \frac{y_H - y_{Z_q}}{x_H - x_{Z_q}} \right) - l_j \sin\varphi_{ji} \right] \Big/ \sin\varphi_{i_q};$$

$$l_{ML} = \left[l_{ZH} \sin\left(\xi_q - arctg \frac{y_H - y_Z}{x_H - x_Z} \right) + l_j \sin(\varphi_{i_q} + \varphi_{ji}) \right] \Big/ \sin\varphi_{i_q}, \quad (11)$$

де $l_{HZ_q} = \sqrt{(x_H - x_{Z_q})^2 + (y_H - y_{Z_q})^2}$.

У випадку спрощеної групи Ассура, де напрямна $q - q$ куліси ML нерухома, довжина j-ї ланки $l_j \equiv l_{LH} = 0$, а кут між напрямною повзуна L і напрямною куліси дорівнює

$\varphi_{iq} - 90^\circ$, вісь Ox_1 можна спрямувати як вправо, так і вліво. За точку Z_q потрібно взяти точку E перетину перпендикуляра, опущеного з початку нерухомої системи координат точки O на напрямну $q-q$. У даному разі координати цієї точки дорівнюватимуть:

$$x_{Zq} = e\cos\left[\xi_q + sign(ze)\cdot\frac{\pi}{2}\right];$$

$$y_{Zq} = e\sin\left[\xi_q + sign(ze)\cdot\frac{\pi}{2}\right],$$

де $e = OZ_q$; $ze = 1-$ при $y_E > 0$ в додатковій системі координат x_1Oy_1; $ze = -1-$ при $y_E < 0$.

Тоді для спрощеної групи Ассура вирази (11) набудуть вигляду

$$l_{MZ_q} = l_{HZ_q}\cos\left(\xi_q - arctg\frac{y_H - y_{Z_q}}{x_H - x_{Z_q}}\right);$$

$$l_{ML_i} = l_{HZ_q}\sin\left(\xi_q - arctg\frac{y_H - y_{Z_q}}{x_H - x_{Z_q}}\right). \qquad (12)$$

Координати повзунів M і L у нерухомій системі координат обчислимо за виразами

$$x_M = x_{Z_q} + l_{MZ_q}\cos\xi_q;$$

$$x_L = x_{Z_q} + l_{MZ_q}\cos\xi_q + l_{ML}\cos\left(\xi_q + \varphi_{i_q}\right),$$

$$y_M = y_{Z_q} + l_{MZ_q}\sin\xi_q;$$

$$y_L = y_{Z_q} + l_{MZ_q}\sin\xi_q + l_{ML}\sin\left(\xi_q + \varphi_{i_q}\right). \qquad (13)$$

Визначення швидкостей

Виражаємо у векторній формі швидкість внутрішньої кінематичної пари $L(L_i)$ через швидкість зовнішніх кінематичних пар H і M і записуємо векторне рівняння, що описує зміну швидкостей точок ланок групи:

$$\underline{\underline{\vec{v}}}_Z + {}_Z\underline{\underline{\vec{v}}}_{M_q} + {}_{M_q}\underline{\vec{v}}_M + {}_M\underline{\underline{\vec{v}}}_{L_i} + {}_{L_i}\underline{\vec{v}}_L = \underline{\underline{\vec{v}}}_H + {}_H\underline{\underline{\vec{v}}}_L. \quad (14)$$

Проектуємо рівняння (14) на осі координат xOy й отриману систему алгебраїчних рівнянь розв'язуємо відносно невідомих відносних швидкостей:

$$\begin{aligned} {}_{M_q}v_M = \frac{1}{\sin\varphi_{iq}}\Big[&v_H \sin(\xi_q + \varphi_{iq} - \gamma_h) - \omega_q l_j \cos\varphi_{ji} - \\ &- v_{Z_q} \sin(\xi_q + \varphi_{iq} - \gamma_z) + \omega_q l_{MZ_q} \cos\varphi_{iq} + \omega_q l_{ML}\Big]; \\ {}_{L_i}v_L = \frac{1}{\sin\varphi_{iq}}\Big[&v_H \sin(\gamma_h - \xi_q) + \omega_q l_j \cos(\varphi_{iq} + \varphi_{ji}) - \\ &- v_Z \sin(\gamma_z - \xi_q) - \omega_q l_{MZ} - \omega_q l_{ML} \cos\varphi_{iq}\Big]. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо швидкості повзунів M і L відносно їхніх напрямних будуть додатними $\left({}_{M_q}v_M > 0,\ {}_{L_i}v_L > 0\right)$, то кути нахилу векторів цих швидкостей дорівнюватимуть, відповідно, $\gamma_{mm_q} = \xi_q$, $\gamma_{ll_i} = \varphi_i$. Якшо ${}_{M_q}v_M < 0$, ${}_{L_i}v_L < 0$, то $\gamma_{mm_q} = \xi_q + \pi$, $\gamma_{ll_i} = \varphi_i + \pi$.

У випадку, якщо група Ассура подана у спрощеному вигляді, кутова і лінійна швидкості напрямної $q - q$ дорівнюють нулеві: $\omega_q = 0$, $v_Z = 0$; довжина j-ї ланки теж дорівнює нулеві – $l_j = 0$. Тоді вирази (15) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} v_i \equiv v_M \equiv {}_{M_q}v_M &= v_H \cos(\xi_q - \gamma_h); \\ {}_{L_i}v_L &= v_H \sin(\gamma_h - \xi_q). \end{aligned} \quad (16)$$

Визначення пришвидшень

Виражаємо у векторній формі пришвидшення внутрішньої кінематичної пари $L(L_i)$ через пришвидшення зовнішніх кінематичних пар M і H і записуємо векторне рівняння, що описує зміну пришвидшень точок ланок групи

$$\begin{aligned}&\underline{\vec{a}}_{Z_q} + {}_{Z_q}\underline{\vec{a}}^{n}_{M_q} + {}_{Z_q}\underline{\vec{a}}^{\tau}_{M_q} + {}_{M_q}\underline{\vec{a}}^{k}_{M} + {}_{M_q}\underline{\vec{a}}^{r}_{M} + {}_{M}\underline{\vec{a}}^{n}_{L_i} + \\ &+ {}_{M}\underline{\vec{a}}^{\tau}_{L_i} + {}_{L_i}\underline{\vec{a}}^{k}_{L} + {}_{L_i}\underline{\vec{a}}^{r}_{L} = \underline{\vec{a}}_{H} + {}_{H}\underline{\vec{a}}^{n}_{L} + {}_{H}\underline{\vec{a}}^{\tau}_{L} .\end{aligned} \tag{17}$$

Проектуємо дане векторне рівняння на осі координат xOy, зводимо отриману систему алгебраїчних рівнянь до канонічного виду і розв'язуємо відносно невідомих пришвидшень:

$$\begin{aligned}{}_{M_q}a^{r}_{M} = \frac{1}{sin\varphi_{iq}}\Big[&a_H\, sin(\xi_q + \varphi_{iq} - \psi_h) + \omega_q^2 l_j\, sin\varphi_{ji} - \varepsilon_q l_j\, cos\varphi_{ji} - \\ &- a_{Z_q}\, sin(\xi_q + \varphi_{iq} - \psi_{z_q}) + \varepsilon_q l_{MZ_q}\, cos\varphi_{iq} + \\ &+ 2\omega_q\, {}_{M_q}v_M\, cos\varphi_{iq} + \varepsilon_q l_{ML_q} + 2\omega_{iq}\, {}_{L_i}v_L\Big] + \omega_q^2 l_{MZ_q} \ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_{L_i}a^{r}_{L} = \frac{1}{sin\varphi_{iq}}\Big[&a_H\, sin(\psi_h - \xi_q) - \omega_q^2 l_j\, sin(\varphi_{iq} + \varphi_{ji}) + \\ &+ \varepsilon_q l_j\, cos(\varphi_{iq} + \varphi_{ji}) - a_Z\, sin(\psi_z - \xi_q) - \\ &- \varepsilon_q l_{ZM} - 2\omega_q\, {}_{M_q}v_M - \varepsilon_q l_{LM}\, cos(\xi_q + \varphi_{iq}) - \\ &- 2\omega_q\, {}_{L_i}v_L\, cos(\xi_q + \varphi_{iq})\Big] + \omega_q^2 l_{MLq} \ .\end{aligned} \tag{18}$$

Якщо пришвидшення повзунів M і L відносно їхніх напрямних будуть додатними $\left\{ {}_{M_q}a^{r}_{M} > 0,\ {}_{L_i}a^{r}_{L} > 0 \right.$, то кути нахилу векторів цих пришвидшень дорівнюватимуть, відповідно, $\psi^{r}_{mm_q} = \xi_q$, $\psi^{r}_{ll_i} = \varphi_i$. Якщо ${}_{M_q}a^{r}_{M} < 0$, ${}_{L_i}a^{r}_{L} < 0$, то $\psi^{r}_{mm_q} = \xi_q + \pi$, $\psi^{r}_{ll_i} = \varphi_i + \pi$.

У випадку, коли група Ассура спрощена, залежності (18) будуть мати вигляд

$${}_{M_q}a^{r}_{M} \equiv a_M = a_H\, cos(\xi_q - \psi_h);$$

$$_{L_q}a_L^r = \frac{a_H \sin(\psi_h - \xi_q)}{sign(zx_q)}, \qquad (19)$$

де $zx_q = -1$ – якщо вісь Ox_q спрямована в бік осі Ox і $zx_q = +1$ – якщо спрямована проти.

Таким чином, кінематичні характеристики групи Ассура II класу V виду визначені.

Стаття надійшла до редколегії 28.01.2000