УДК 621.01

В.Р. ПАСІКА

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ПЛАНІВ У КІНЕТОСТАТИЧНОМУ АНАЛІЗІ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ II КЛАСУ

Відомо, що будь-який механізм складається з нерухомої ланки (стояка), рухомих ланок і кінематичних пар, що з'єднують ці ланки. При роботі механізму на його ланки діють рушійні сили та сили корисного і шкідливого опору, сили ваги та сили інерції. Під дією їх ланки механізму деформуються, а в кінематичних парах виникають сили взаємодії між ланками (реакції). Знання цих сил необхідне для розрахунку ланок механізму на міцність, жорсткість, вібростійкість, а кінематичних пар – на міцність і зносостійкість. Очевидно, що від величини даних сил будуть залежати конструктивні розміри як ланок, так і кінематичних пар.

Сьогодні існує кілька методів кінетостатичного розрахунку механізмів: планів сил, незалежності дії сил, мотузкового багатокутника.

У даній статті автор робить спробу довести до читача своє бачення аналітичного методу планів стосовно механізмів II класу. Групи Ассура подані у найширшому вигляді, а результати зведені до аналітичних залежностей, придатних для безпосереднього програмування. Все це дає змогу досліджувати складні важільні механізми. Результати роботи будуть особливо корисними при дослідженні замінюючих механізмів.

Механізм I класу з обертальною кінематичною парою

Механізми I класу з обертальною кінематичною парою належать, як правило, до початкових механізмів технологічних машин. На рис.1 подано механізм I класу, навантажений певною системою сил: R_{ij} – реакція, яка діє на тягову ланку OA з боку j-ї ланки відкинутої частини механізму (визначається з кінетостатичного аналізу відкинутої частини механізму і відома при розрахунку тягової ланки); G_i – сила ваги ланки; $\bar{F}_{S_i}$ – сила інерції (визначається за другим законом Ньютона); $\bar{F}_{a}$ – результуючий вектор інших відомих сил і моментів, які діють на ланку; R_{i0} – реакція, яка діє на тягову ланку з боку стояка (невідома за

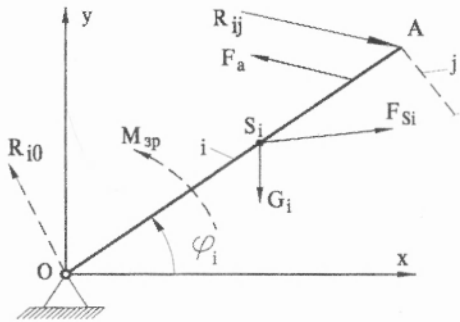

Рис. 1. Схема навантаження механізму I класу з обертальною кінематичною парою

напрямком і величиною); $M_{зр}$ – зрівноважуючий момент (невідомий за величиною). Три невідомі силові фактори – реакцію R_{i0}, кут її нахилу до осі абсцис α_{i0}, величину зрівноважуючого моменту $M_{зр}$ – знаходимо з рівнянь статики, застосувавши принцип Д'Аламбера:

$$M_{зр} = G_i l_{OS_i} \cos\varphi_i + m_i l_{OS_i}^2 \varepsilon_i + \varepsilon_i J_{S_i} - \\ - R_{ij} l_{OA} \sin(\alpha_{ij} - \varphi_i) - F_a l_{OB} \sin(\alpha_a - \varphi_i),$$

$$tg\alpha_{i0} = \frac{-\sum F_{ув}}{-\sum F_{хв}}, \qquad R_{i0} = \frac{-\sum F_{хв}}{\cos\alpha_{i0}} \quad \text{при} \quad \cos\alpha_{i0} \neq 0 \quad \text{і}$$

$$R_{i0} = \frac{-\sum F_{ув}}{\sin\alpha_{i0}} \quad \text{при} \ \sin\alpha_{i0} \neq 0,$$

де ε_i – кутове пришвидшення ланки; α – кути нахилу відповідних сил до додатного напрямку осі абсцис; $\sum F_{хв} = F_{S_i} \cos\alpha_{s_i} + R_{ij} \cos\alpha_{ij} + F_a \cos\alpha_a$; $\sum F_{ув} = -G_i + F_{S_i} \sin\alpha_{s_i} + + R_{ij} \sin\alpha_{ij} + F_a \sin\alpha_a$ – сума проекцій, відповідно, на вісь абсцис й ординат усіх відомих сил, що діють на ланку.

Чверть, в якій знаходитиметься кут α_{i0} , повністю визначається знаками чисельника і знаменника.

Механізм I класу з поступальною кінематичною парою

Рухома ланка механізму I класу з поступальною кінематичною парою є тяговою ланкою механізмів двигунів. На рис.2 наведено механізм I класу з поступальною кінематичною парою і навантажений системою сил: $\bar{R}_{ij}$ – реакція, яка діє на тягову ланку O з боку j-ї ланки відкинутої частини механізму (при розрахунку тягової ланки ця реакція вже відома); G_i – сила ваги ланки; F_{S_i} – сила інерції ланки; F_a – результуючий вектор

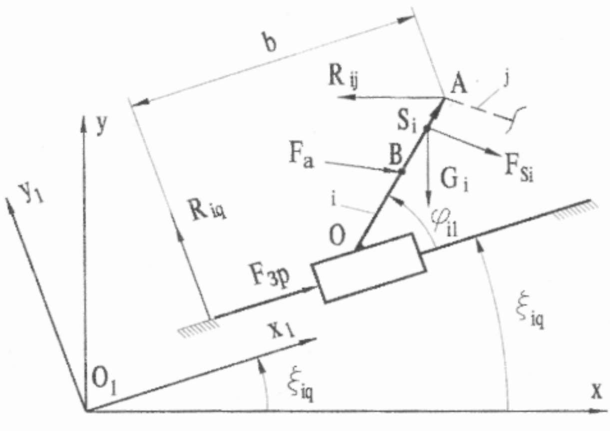

Рис. 2. Схема навантаження механізму I класу з поступальною кінематичною парою

інших відомих сил і моментів, які можуть діяти на ланку; R_{iq} – невідома реакція напрямної на ланку; $F_{зр}$ – невідома зрівноважуюча сила.

Склавши за принципом Д'Аламбера рівняння рівноваги в допоміжній системі координат $x_1 O_1 y_1$, знаходимо невідомі величини R_{iq}, $F_{зр}$, b:

$$F_{зр} = G_i \sin \xi_{iq} - F_{S_i} \cos(\alpha_{s_i} - \xi_{iq}) - \\ - F_a \cos(\alpha_a - \xi_{iq}) - R_{ij} \cos(\alpha_{ij} - \xi_{iq}).$$

Якщо $F_{зр} >$, то $\alpha_{зр} = \xi_{iq}$; якщо $F_{зр} < 0$, то $\alpha_{зр} = \xi_{iq} + \pi$.

$$R_{iq} = G_i \cos \xi_{iq} - F_{S_i} \sin(\alpha_{s_i} - \xi_{iq}) - \\ - F_a \sin(\alpha_a - \xi_{iq}) - R_{ij} \sin(\alpha_{ij} - \xi_{iq}).$$

Коли $R_{iq} > 0$, то $\alpha_{i0} = \xi_{iq} + \pi/2$; коли $R_{iq} < 0$, то $\alpha_{i0} = \xi_{iq} - \pi/2$.

$$b = \frac{1}{R_{iq}} \Big[+ F_{зр} l_{OA} \sin \varphi_{i1} + G_i l_{AS_i} \cos(\varphi_{i1} + \xi_i) - \\ - F_{S_i} l_{AS_i} \sin(\alpha_{s_i} - \xi_{iq} - \varphi_{i1}) - F_a l_{AB} \sin(\alpha_a - \xi_{iq} - \varphi_{i1}) \Big] .$$

Якщо $b>0$, то точка прикладання реакції R_{iq} знаходиться зліва від точки A по осі $O_1 x_1$; коли $b<0$ – справа.

Кінетостатичний аналіз механізмів II класу методом проектування планів

Кінетостатичний аналіз проводимо на основі структурної класифікації механізмів за Ассуром. Згідно з цією класифікацією, механізм ділимо на групи Ассура, які є статично визначеними системами, і записуємо для кожної групи рівняння рівноваги з урахуванням принципу Д'Аламбера.

Як відомо, кожна кінематична пара V класу дає дві невідомі складові реакції. Тоді для всієї групи Ассура II класу матимемо шість невідомих. Для їх знаходження необхідно скласти систему шести рівнянь рівноваги. Розв'язок такої системи може викликати певні труднощі. Для зменшення математичних обчислень складатимемо рівняння рівноваги таким чином, аби отримати систему з якнайменшою кількістю рівнянь.

При врахуванні мас ланок у рівняння рівноваги, крім невідомих реакцій, завжди будуть входити сили ваги G_i, сили інерції F_{S_i}, моменти сил інерції M_{S_i}. Окрім цих сил, на ланки можуть діяти ще й інші відомі сили і моменти. Аби не завантажувати рисунки і рівняння рівноваги, позначимо суму усіх інших відомих сил і моментів, які діють на ланку, відповідно, через $\sum_{k=1}^{n} F_{ik}$ і $\sum_{k=1}^{n_1} M_{ik}$. Тут n – кількість відомих сил, крім сил ваги та інерції, що діють на ланку; n_1 – кількість відомих моментів, окрім моментів сил інерції, що діють на ланку.

На рис.3 зображена деяка ланка MLQ, яка навантажена

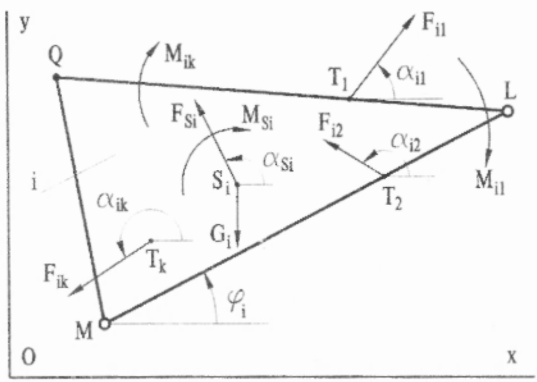

Рис. 3. Схема навантаженої ланки до визначення проекцій сил і суми моментів

певною системою відомих сил і моментів: G_i, F_{S_i}, M_{S_i}, $F_{i1},\ldots,F_{in}$, $M_{i1},\ldots,$ M_{in}. При складанні рівнянь рівноваги завжди необхідно проектувати сили на осі координат і записувати суму моментів відносно зовнішньої (наприклад

M) або внутрішньої (наприклад L) кінематичних пар. Покажемо, як виглядатимуть проекції сил і моментів для довільної ланки MLQ.

Проекція усіх відомих сил на вісь абсцис й ординат

$$\Sigma F_{ix\,в} = F_{S_i} \cos\alpha_{S_i} + \sum_{k=1}^{n} F_{ik} \cos\alpha_{ik} \,,$$

$$\Sigma F_{iy\,в} = -G_i + F_{S_i} \sin\alpha_{s_i} + \sum_{k=1}^{n} F_{ik} \sin\alpha_{ik} \,. \qquad (1)$$

Сила інерції і кут нахилу вектора сили, відповідно, дорівнюють:

$$F_{S_i} = m_i a_{S_i}, \qquad \alpha_{s_i} = \psi_{s_i} \pm \pi,$$

де α_{S_i} і ψ_{s_i} – пришвидшення центра мас i - ї ланки і кут нахилу вектора пришвидшення до осі абсцис. Ці параметри обчислюються в кінематичному аналізі, приміром [1, 2].

Сума моментів відомих сил і моментів відносно зовнішньої кінематичної пари M буде така:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{M(i)в} = {} & \left|\vec{l}_{MS_i} \times \vec{G}_i\right| + \left|\vec{l}_{MS_i} \times \vec{F}_{S_i}\right| + \sum_{k=0}^{n} \left|\vec{l}_{MT_k} \times \vec{F}_{ik}\right| + \\ & + M_{S_i} + \sum_{k=0}^{n_1} M_{ik} sign(zM_k) = -l_{MS_i} G_i \cos\cdot \\ & \cdot\left[\varphi_i + < S_i ML \cdot sign(zS_i M)\right] + l_{MS_i} F_{S_i} \sin\cdot \\ & \cdot\left[\alpha_{s_i} - \varphi_i - < S_i ML \cdot sign(zS_i M)\right] - \varepsilon_i J_{S_i} + \\ & + \sum_{k=0}^{n} l_{MT_k} F_{ik} \sin\left[\alpha_{ik} - \varphi_i - < T_k ML \cdot sign(zT_k M)\right] + \\ & + \sum_{k=0}^{n_1} M_{ik} sign(zM_k).\end{aligned} \qquad (2)$$

Суму моментів відомих сил і моментів відносно внутрішньої кінематичної пари L визначаємо за формулою

$$\sum M_{L(i)\text{в}} = l_{LS_i} G_i \cos[\varphi_i + <S_i LM \cdot sign(zS_i L)] -$$
$$- - l_{LS_i} F_{S_i} \sin[\alpha_{s_i} - \varphi_i - <S_i LM \cdot sign(zS_i M)] - \varepsilon_i J_{S_i} -$$
$$- \sum_{k=0}^{n} l_{LT_k} F_{ik} \sin[\alpha_{ik} - \varphi_i - <T_k LM \cdot sign(zT_k L)] +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n_1} M_{ik} \cdot sign(zM_k), \qquad (3)$$

де $zS_i M = 1$ і $zS_i L = 1$ – якщо обхід контурів, відповідно, $S_i ML$ і $S_i LM$ відбувається проти стрілки годинника і, навпаки, $zS_i M = -1$ і $zS_i L = -1$ – якщо за стрілкою; ε_i, J_{S_i} – кутове пришвидшення і момент інерції i-ї ланки, відповідно; $zT_k M = 1$ і $zT_k L = 1$ – коли обхід контурів, відповідно, $T_k ML$ і $T_k LM$ відбувається проти стрілки годинника і, навпаки, $zT_k M = -1$ і $zT_k L = -1$ – коли за стрілкою; $zM_k = 1$ – якщо момент M_k діє проти стрілки годинника і, навпаки, $zM_k = -1$ – якщо за стрілкою.

У багатьох випадках реакції, які діють у кінематичних парах, будемо розкладати на дві складові x і y. Тоді повну реакцію і кут її нахилу до осі абсцис визначатимемо за виразами:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \alpha = \arctan\frac{y}{x}. \qquad (4)$$

Відомо, що існує п’ять видів груп Ассура II класу. І хоча принципової різниці при кінетостатичному аналізі різних видів груп Ассура немає, усе-таки кожна з них має свої особливості розрахунку.

Розглянемо способи визначення реакцій у кінематичних парах кожної з 5-ти видів груп Ассура окремо.

Група Ассура I виду

Група Ассура II класу I виду складається з двох ланок і трьох обертальних кінематичних пар V класу. Нехай у зовнішніх кінематичних парах M і H до групи приєднуються інші ланки механізму – k і q, відповідно (рис.4). При дії на групу певної

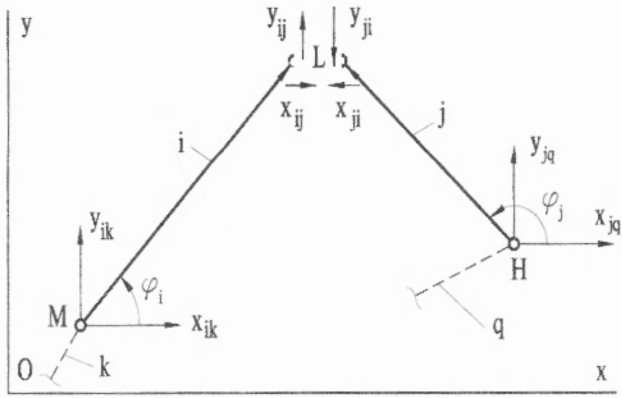

Рис. 4. Група Ассура II класу I виду

системи сил і моментів у кінематичних парах виникатимуть реакції, які розкладаємо на два напрямки вздовж осей нерухомої системи координат xOy: x_{ik}, y_{ik}, $\vec{x}_{ij} = -\vec{x}_{ji}$, $\vec{y}_{ij} = -\vec{y}_{ji}$, x_{jq}, y_{jq}.

Для знаходження реакції у внутрішній кінематичній парі L записуємо два рівняння рівноваги:

$$\left.\begin{aligned} \sum M_{M(i)} &= 0, \quad \left|\vec{l}_i \times \vec{x}_{ij}\right| + \left|\vec{l}_i \times \vec{y}_{ij}\right| + \sum M_{M(i)\text{в}} = 0, \\ \sum M_{H(j)} &= 0, \quad \left|\vec{l}_j \times \vec{x}_{ji}\right| + \left|\vec{l}_j \times \vec{y}_{ji}\right| + \sum M_{H(j)\text{в}} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Суму моментів відомих сил системи рівнянь обчислюємо за залежністю (1), а розв'язок системи знаходимо за методом Крамера:

$$x_{ij} = \frac{l_i \cos\varphi_i \sum M_{H(j)\text{в}} + l_j \cos\varphi_j \sum M_{M(i)\text{в}}}{l_i l_j \sin(\varphi_i - \varphi_j)},$$

$$y_{ij} = \frac{l_i \sin\varphi_i \sum M_{H(j)\text{в}} + l_j \sin\varphi_j \sum M_{M(i)\text{в}}}{l_i l_j \sin(\varphi_i - \varphi_j)}.$$

Повну реакцію у кінематичній парі L і кут α_{ll} нахилу реакції до осі абсцис визначаємо за виразами (4).

Реакцію у зовнішній кінематичній парі M знаходимо з рівнянь проекцій усіх сил, які діють на i-у ланку

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad x_{ik} + x_{ij} + \Sigma F_{ix\,в} = 0, \qquad x_{ik} = -x_{ij} - \Sigma F_{ix\,в},$$
$$\sum F_{iy} = 0, \qquad y_{ik} + y_{ij} + \Sigma F_{iy\,в} = 0, \qquad y_{ik} = -y_{ij} - \Sigma F_{iy\,в}.$$

Суму проекцій $\Sigma F_{ix\,в}$, $\Sigma F_{iy\,в}$ відомих сил обчислюємо за виразами (1).

Повну реакцію в кінематичний парі M і кут нахилу α_{ik} реакції до осі абсцис визначаємо за виразами (4).

Аналогічно визначаємо реакцію в кінематичній парі H :

$$\sum F_{jx} = 0, \qquad x_{jq} - x_{ji} + \Sigma F_{jx\,в} = 0, \qquad x_{jq} = x_{ij} - \Sigma F_{jx\,в},$$
$$\sum F_{jy} = 0, \qquad y_{jq} - y_{ji} + \Sigma F_{jy\,в} = 0, \qquad y_{jq} = y_{ij} - \Sigma F_{jy\,в}.$$

Вектор реакції в кінематичній парі H знаходимо за виразами (4).

Група Ассура II виду

У групі Ассура II класу II виду одна зовнішня кінематична пара, наприклад H, поступальна (рис.5). У кінематичній парі M до групи приєднується ланка k відкинутої

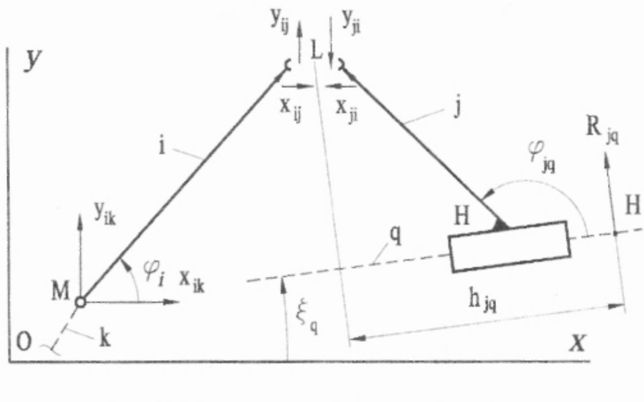

Рис. 5. Група Ассура II класу II виду

частини механізму, а напрямною повзуна HL служить ланка q. Невідомі реакції x_{ik}, y_{ik}, x_{ij}, y_{ij}, R_{jq} і відстань h_{jq} знаходимо з рівнянь рівноваги:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum M_{L(i)} = 0, && \left|\vec{l}_i \times \vec{x}_{ik}\right| + \left|\vec{l}_i \times \vec{y}_{ik}\right| + \Sigma M_{L(i)в} = 0,\\
&\sum F_x = 0, && x_{ik} + \Sigma F_{ixв} + R_{jq} \cos\left(\xi_q + \frac{\pi}{2}\right) + \Sigma F_{jxв} = 0,\\
&\sum F_y = 0, && y_{ik} + \Sigma F_{iyв} + R_{jq} \sin\left(\xi_q + \frac{\pi}{2}\right) + \Sigma F_{jyв} = 0,
\end{aligned}\right\}$$

де $M_{L(i)в}$ – сума моментів усіх відомих сил і моментів, які діють на i-у ланку відносно внутрішньої кінематичної пари L (обчислюємо за виразом (3)); $\sum F_{ixв}$, $\sum F_{iyв}$ і $\sum F_{jxв}$, $\sum F_{jyв}$ – сума проекцій на осі координат відомих сил, які діють на i-у і j-у ланки, відповідно (вираховуємо за виразами (1)); ξ_q – кут нахилу напрямної повзуна H, яку спрямовуємо в бік проекції шатуна ML на цю ж напрямну.

Розв'язуємо систему за методом Крамера:

$$R_{jq} = \frac{-\frac{1}{l_i}\sum M_{L(i)в} + \sin\varphi_i\left(\sum F_{ixв} + \sum F_{jxв}\right) - \cos\varphi_i\left(\sum F_{iyв} + \sum F_{jyв}\right)}{\cos(\varphi_i - \xi_q)}.$$

Якщо реакція $R_{jq} > 0$, то кут нахилу реакції $\alpha_{jq} = \xi_q + \pi/2$. Коли $R_{jq} < 0$, то $\alpha_{jq} = \xi_q - \pi/2$.

$$x_{ik} = \frac{\frac{-\sin\xi_q}{l_i}\sum M_{L(i)в} - \cos\varphi_i \cos\xi_q\left(\sum F_{ixв} + \sum F_{jxв}\right) -}{\cos(\varphi_i - \xi_j)},$$

$$\frac{-\cos\varphi_i \sin\xi_q\left(\sum F_{iyв} + \sum F_{jyв}\right)}{\cos(\varphi_i - \xi_j)}$$

$$y_{ik} = \frac{\frac{\cos\xi_q}{l_i}\sum M_{L(i)в} - \sin\varphi_i \cos\xi_q\left(\sum F_{ixв} + \sum F_{jxв}\right) -}{\cos(\varphi_i - \xi_q)} \cdot$$
$$\frac{-\sin\varphi_i \sin\xi_q\left(\sum F_{iyв} + \sum F_{jyв}\right)}{\cos(\varphi_i - \xi_q)}$$

Повну реакцію в кінематичний парі M і її кут нахилу знаходимо за виразами (4).

Реакцію в кінематичній парі L визначаємо з рівнянь статики, розглянувши рівновагу ланки ML (можна і HL):

$$\sum F_{ix} = 0, \quad x_{ik} + \sum F_{ixв} + x_{ij} = 0, \quad x_{ij} = -x_{ik} - \sum F_{ixв},$$
$$\sum F_{iy} = 0, \quad y_{ik} + \sum F_{iyв} + y_{ij} = 0, \quad y_{ij} = -y_{ik} - \sum F_{iyв}.$$

Повну реакцію в кінематичний парі L обчислюємо за виразами (4).

Плече прикладання сили R_{jq} знаходимо з рівняння моментів для j-ї ланки:

$$\sum M_{L(j)} = 0, \quad R_{jq}h_{jq} + \sum M_{L(j)в} = 0, \quad h_{jq} = \frac{-1}{R_{jq}}\sum M_{L(j)в} \cdot$$

Плече h_{iq} – це відстань від внутрішньої кінематичної пари L до точки H_R прикладання реакції R_{jq}.

Координати точки H_R дорівнюють:

$$x_{H_R} = x_L + h_{jq}\cos\xi, \qquad y_{H_R} = y_L + h_{jq}\sin\xi.$$

Суму $\sum M_{L(j)в}$ моментів відомих сил і моментів, які діють на ланку LH відносно внутрішньої кінематичної пари L, обчислюємо за виразом (3). Якщо плече h_{jq} набуває від'ємних значень, то це вказує на те, що реакція R_{jq} розташована зліва від точки L на напрямній повзуна H, а не справа, як це показано на рис.5.

Для більшості механізмів довжина j-ї ланки $l_{LH}=0$. Визначення реакції такої групи можна проводити як за отриманими вище залежностями, так і за простішими:

$$R_{jq}=\frac{-\sum M_{M\text{в}}}{l_i\cos(\varphi_i-\xi_q)}.$$

Проектуємо всі сили, які діють на групу на осі координат і визначаємо невідомі складові реакції R_{ik}:

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x=0, \quad x_{ik}+\sum F_{x\text{в}}+|R_{jq}|\cos\alpha_{jq}=0, \quad x_{ik}=-\sum F_{x\text{в}}-|R_{jq}|\cos\alpha_{jq},\\ &\sum F_y=0, \quad y_{ik}+\sum F_{y\text{в}}+|R_{jq}|\sin\alpha_{jq}=0, \quad y_{ik}=-\sum F_{y\text{в}}-|R_{jq}|\sin\alpha_{jq},\end{aligned}\right\}$$

де $\sum F_{x\text{в}}$, $\sum F_{y\text{в}}$ – сума проекцій, відповідно, на вісь абсцис і ординат усіх відомих сил, які діють на групу (обчислюємо за виразами (1)).

Реакцію у внутрішній кінематичній парі L знайдемо, розглянувши, наприклад, рівновагу повзуна:

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_{jx}=0, \quad x_{ji}+\Sigma F_{jx\text{в}}+|R_{jq}|\cos\alpha_{jq}=0,\\ &\sum F_{jy}=0, \quad y_{ji}+\Sigma F_{jy\text{в}}+|R_{jq}|\sin\alpha_{jq}=0,\end{aligned}\right\}$$

де $\sum F_{jx\text{в}}$, $\sum F_{jy\text{в}}$ – сума проекцій на осі координат відомих сил, які діють на j-у ланку (повзун) (обчислюємо за виразами (1).

З рівнянь рівноваги визначаємо невідомі реакції:

$$x_{ji}=-\sum F_{jx\text{в}}-|R_{jq}|\cos\alpha_{jq}; \qquad y_{ji}=-\sum F_{jy\text{в}}-|R_{jq}|\sin\alpha_{jq}.$$

Як бачимо, у випадку спрощеної групи Ассура реакції визначаються простіше.

Група Ассура III виду

У групі Ассура II класу III виду внутрішня кінематична пара L поступальна, а зовнішні кінематичні пари M і H – обертальні (рис.6). Реакції у зовнішніх кінематичних парах

M і H розкладаємо на два напрямки вздовж осей системи координат xOy: x_{ik}, y_{ik} і x_{jq}, y_{jq}.

У внутрішній кінематичній парі L реакція між повзуном HL і кулісою MTL у загальному випадку буде зміщена на плече h_{ij} відносно кінематичної пари II. Для знаходження невідомих реакцій і плеча h_{ij} складемо рівняння рівноваги.

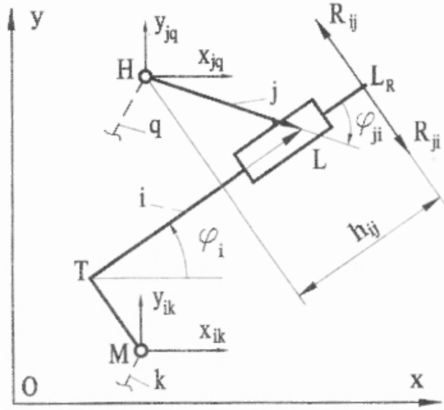

Рис. 6. Група Ассура II класу III виду

Для куліси MTL:

$$\sum M_{M(i)} = 0, \qquad R_{ij}\left(h_{ij} + l_i - l_j \cos\varphi_{ji}\right) + \sum M_{M(i)в} = 0,$$

де $l_i = l_{TL}$; $l_j = l_{HL}$; φ_{ji} – кут нахилу ланки HL до ланки TL.

Для ланки HL:

$$\sum M_{H(j)} = 0; \qquad -R_{ji}h_{ij} + \sum M_{H(j)в} = 0.$$

Суму моментів відомих сил і моментів $\sum M_{M(i)в}$ і $\sum M_{H(j)в}$ вираховуємо за виразом (2).

З двох останніх рівнянь знаходимо:

$$R_{ij} = \frac{\sum M_{M(i)в} + \sum M_{H(j)в}}{l_j\, cos\varphi_{ji} - l_i}, \quad h_{ij} = \frac{\sum M_{H(j)в}\left(l_j\, cos\varphi_{ji} - l_i\right)}{\sum M_{M(i)в} + \sum M_{H(j)в}}.$$

Кути α_{ij} і α_{ji} нахилу векторів $\vec{R}_{ij}$ і $\vec{R}_{ji}$ обчислюємо за виразами

$$\alpha_{ij} = \varphi_i + \frac{\pi}{2} sign\left(R_{ij}\right), \qquad \alpha_{ji} = \varphi_i - \frac{\pi}{2} sign\left(R_{ji}\right).$$

Якщо плече $h_{ij} > 0$, то реакція R_{ij} виникає справа від кінематичної пари H на кулісі і, навпаки, коли $h_{ij} < 0$, реакція R_{ij} виникає зліва від кінематичної пари H на кулісі.

Координати точки L_R прикладання реакцій R_{ij}, R_{ji} знайдемо після простих тригонометричних перетворень, спроектувавши векторний контур $\vec{l}_{L_R} = \vec{l}_H + \vec{l}_j + \vec{l}_j\, cos\varphi_{ji} + \vec{h}_{ij}$ на осі координат xOy:

$$x_{L_R} = x_H - l_j\, sin\varphi_{ji}\, sin\varphi_i + h_{ij}\, cos\varphi_i,$$
$$y_{L_R} = y_H + l_j\, sin\varphi_{ji}\, cos\varphi_i + h_{ij}\, sin\varphi_i.$$

Наступні рівняння рівноваги складемо для кожної ланки групи окремо.

Для ланки MTL:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad x_{ik} + \sum F_{i\,вx} + R_{ij}\, cos\alpha_{ij} = 0,$$
$$\sum F_{iy} = 0, \quad y_{ik} + \sum F_{iy\,в} + R_{ij}\, sin\alpha_{ij} = 0,$$

де $\sum F_{i\,вx}$, $\sum F_{i\,вy}$ – сума проекцій на осі координат усіх відомих сил, які діють на ланку. Знаходимо за виразом (1).

З двох останніх рівнянь визначаємо:

$$x_{ik} = -\sum F_{i\,вx} - R_{ij}\, cos\alpha_{ij}, y_{ij} = -\sum F_{iy\,в} - R_{ij}\, sin\alpha_{ij}.$$

Повну реакцію обчислюємо за виразами (4).

Для ланки HL:

$$\sum F_{jx}=0,\quad x_{jq}+R_{ji}\cos\alpha_{ji}+\sum F_{jx\,в}=0,$$

$$\sum F_{jy}=0,\quad y_{jq}+R_{ji}\cos\alpha_{ji}+\sum F_{jy\,в}=0,$$

де $\sum F_{jx\,в}$, $\sum F_{jy\,в}$ – сума проекцій на осі координат усіх відомих сил, які діють на ланку HL. Знаходимо за виразами (1).

З двох останніх рівнянь визначаємо: $x_{jq}=-R_{ji}\cos\alpha_{ji}-\sum F_{jx\,в}$, $y_{jq}=-R_{ji}\sin\alpha_{ji}-\sum F_{j\,вy}$.

Повну реакцію в кінематичній парі H і кут нахилу реакції обчислюємо за виразами (4).

На практиці часто можна зустріти механізми, в яких група Ассура III виду спрощена. Для такої групи довжина j-ї ланки $l_{HL}=l_j=0$, а куліса пряма, тобто довжина коліна куліси $l_{MT}=0$. Для такої групи вираз для визначення реакції між ланками групи спрощується і набуває вигляду

$$R_{ij}=\frac{-\sum M_{M(i)\,в}}{l_i},$$

а плече h_{ij} прикладання цієї реакції дорівнює нулеві, тобто реакція проходить через обертальну кінематичну пару H .

Реакції R_{ik} і R_{jq} обчислюються за тими ж виразами, що і для неспрощеної групи Ассура.

Група Ассура IV виду

У групі Ассура II класу IV виду зовнішні кінематичні пари M і H поступальні, а внутрішня пара L – обертальна (рис. 7). Повзун ML утворює поступальну кінематичну пару з ланкою k, а повзун HL – з ланкою q. Кути φ_{ik}, φ_{jq} – кути нахилу ланок ML і HL до ланок k і q, відповідно; ξ_k, ξ_q – кути нахилу напрямних повзунів. Конкретніше про кути в [2].

Невідомі реакції і точки їх прикладання знайдемо з рівнянь рівноваги.

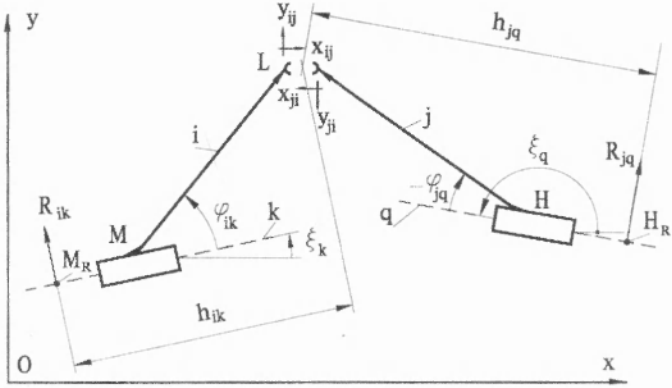

Рис. 7. Група Ассура II класу IV виду

Реакції між повзунами та їх напрямними знайдемо з рівнянь проекцій усіх сил, які діють на групу на осі координат xOy, а розв'язок – за методом Крамера:

$$R_{ik} = \frac{\sin\xi_q \sum F_{y\text{в}} + \cos\xi_q \sum F_{x\text{в}}}{\sin(\xi_k - \xi_q)},$$

$$R_{jq} = \frac{\sin\xi_k \sum F_{y\text{в}} + \cos\xi_k \sum F_{x\text{в}}}{\sin(\xi_k - \xi_q)}.$$

Кути нахилу цих реакцій дорівнюватимуть:

$$\alpha_{ik} = \xi_k + \frac{\pi}{2} sign(R_{ik}), \qquad \alpha_{jq} = \xi_q - \frac{\pi}{2} sign(R_{jq}).$$

Реакцію у внутрішній кінематичній парі L визначаємо, проектуючи всі сили, які діють на кожну з ланок, на осі координат (наприклад ML):

$$\sum F_{ix} = 0, \quad R_{ik}\cos\alpha_{ik} + \sum F_{ix\text{в}} + x_{ij} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad R_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum F_{iy\text{в}} + y_{ij} = 0.$$

З цих рівнянь знайдемо:

$$x_{ij} = -R_{ik} \cos\alpha_{ik} - \sum F_{ix\,в}, \quad y_{ij} = -R_{ik} \sin\alpha_{ik} - \sum F_{iy\,в}.$$

Плечі h_{ik} і h_{jq} прикладання реакцій R_{ik} і R_{jq} визначаємо з рівнянь моментів відносно внутрішньої кінематичної пари L для кожної з ланок:

$$h_{ik} = \frac{\sum M_{L(i)в}}{R_{ik}}, \qquad h_{jq} = \frac{-\sum M_{L(j)в}}{R_{jq}},$$

де $\sum M_{L(i)в}$, $\sum M_{L(j)в}$ – сума моментів відомих сил і моментів відносно внутрішньої кінематичної пари L, відповідно, для i-ї та j-ї ланок. Обчислюємо за виразами (3).

Координати точки M_R прикладання реакції R_{ik} знаходимо за виразами

$$x_{M_R} = x_L - h_{ik} \cos\xi_k, \qquad y_{M_R} = y_L - h_{ik} \sin\xi_k.$$

Координати точки прикладання реакції R_{jq} визначаємо так:

$$x_{H_R} = x_L - h_{jq} \cos\xi_q, \qquad y_{H_R} = y_L - h_{jq} \sin\xi_q.$$

Група Ассура V виду

У групі Ассура II класу V виду внутрішня й одна зовнішня кінематичні пари поступальні (рис.8).

Кут φ_{ik} – це кут нахилу напрямної (i-ї ланки) повзуна HL до напрямної повзуна M (ланки k), кут ξ_k – кут нахилу напрямної повзуна M до осі Ox, кут φ_{ij} – кут між ланками групи. Ці кути відомі з кінематичного аналізу [2]. Невідомі реакції R_{ik}, R_{ij}, R_{jq}, плечі h_{ik}, h_{ij} прикладання реакцій R_{ik}, R_{ij} знайдемо з рівнянь рівноваги.

Реакції між повзунами та їх напрямними визначимо з рівнянь проекцій на осі координат усіх сил, які діють на i-у ланку:

$$R_{ik} = \frac{\cos(\varphi_{ik} + \xi_k)\sum F_{ixв} + \sin(\varphi_{ik} + \xi_k)\sum F_{iyв}}{-\sin\varphi_{ik}},$$

$$R_{ij} = \frac{\cos\xi_k \sum F_{ixв} + \sin\xi_k \sum F_{iyв}}{\sin\varphi_{ik}},$$

де $\sum F_{ixв}$, $\sum F_{iyв}$ – сума проекцій усіх відомих сил на осі Ox і Oy, відповідно. Обчислюємо за виразами (1).

Кути α_{ik} і α_{ij} нахилу векторів реакцій $\vec{R}_{ik}$ і $\vec{R}_{ij}$ обчислюємо за виразами

$$\alpha_{ik} = \xi_k + \frac{\pi}{2}sign(R_{ik}), \qquad \alpha_{ij} = \xi_k + \varphi_{ik} + \frac{\pi}{2}sign(R_{ij}).$$

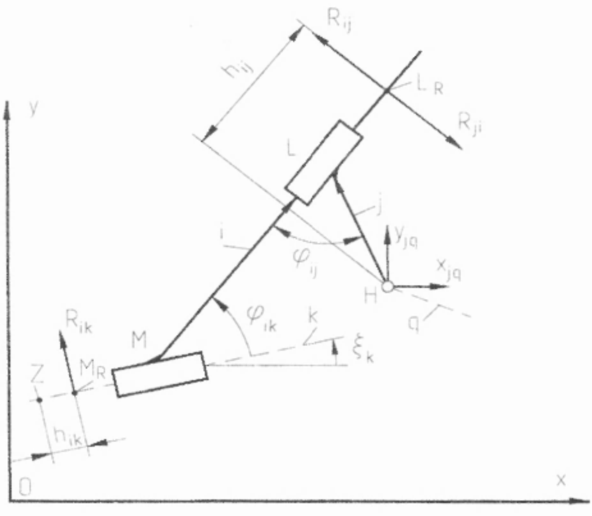

Рис. 8. Група Ассура *II* класу *V* виду

Для знаходження реакцій у кінематичній парі H необхідно записати рівняння проекцій усіх сил, які діють на всю групу, і визначити

$$x_{jq} = -R_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum F_{ixв} - \sum F_{jxв},$$
$$y_{jq} = -R_{ik}\sin\alpha_{ik} - \sum F_{iyв} - \sum F_{jyв}.$$

Повну реакцію в кінематичній парі H і кут її нахилу знайдемо за виразами (4).

Плече h_{ij} прикладання реакції R_{ij} визначимо з рівняння моментів для j-ї ланки :

$$\sum M_{H(j)} = 0, \quad -R_{ji}h_{ij} + \sum M_{H(j)в} = 0, \quad h_{ij} = \sum M_{H(j)в} / R_{ji}.$$

Координати точки L_R прикладання реакції R_{ij} знаходимо після простих тригонометричних перетворень, спроектувавши векторний контур $\vec{l}_{L_R} = \vec{l}_H + \vec{l}_j + \vec{l}_j\cos\varphi_{ij} + \vec{h}_{ij}$ на осі координат xOy:

$$x_{L_R} = x_H - l_j\sin\varphi_{ij}\sin(\varphi_{ik} + \xi_k) + h_{ij}\cos(\varphi_{ik} + \xi_k),$$
$$y_{L_R} = y_H + l_j\sin\varphi_{ij}\cos(\varphi_{ik} + \xi_k) + h_{ij}\sin(\varphi_{ik} + \xi_k).$$

Плече h_{ik} прикладання реакції R_{ik} визначимо з рівнянь моментів для i-ї ланки:

$$\sum M_{Z(i)} = 0, \quad R_{ik}\cdot h_{ik} + \sum M_{Z(i)в} + R_{ij}l_{ZL_R}\sin(\alpha_{ij} - \varphi_{zl_r}) = 0,$$
$$h_{ik} = \frac{-\sum M_{Z(i)в} - R_{ij}l_{ZL_R}\sin(\alpha_{ij} - \varphi_{zl_r})}{R_{ik}},$$

де $\sum M_{Z(i)в}$ – сума моментів усіх відомих силових факторів, які діють на i-у ланку відносно точки Z (обчислюємо за виразом (2)); l_{ZL_R} – відстань від точки Z до точки L_R (вираховуємо за виразом $l_{ZL_R} = \sqrt{(x_{L_R} - x_Z)^2 + (y_{L_R} - y_Z)^2}$); координати точки Z – x_Z, y_Z - відомі з умови задачі [2]; φ_{zl_r} – кут нахилу вектора ZL_R (на рис.8 не проведений) до осі абсцис. Обчислюємо за виразом $\varphi_{zl_r} = arctg\dfrac{y_{L_R} - y_Z}{x_{L_R} - x_Z}$.

Координати точки M_R прикладання реакції R_{ik} дорівнюють:

$$x_{M_R} = x_Z + h_{ik} \cos\xi_k, \qquad y_{M_R} = y_Z + h_{ik} \sin\xi_k.$$

1. Пасіка В.Р. Кінематика важільних механізмів з групами Ассура І і ІІ видів//Наукові записки. Львів: УАД. 2001. Вип. 3. С. 12–16. 2. Пасіка В.Р. Кінематичний аналіз важільних механізмів з групами Ассура ІІІ і V видів//Поліграфія і видавнича справа. 2001. №37. С. 50–66.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.2002