УДК 686.12+621.396

Г. Петриашвили

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ КНИЖНОГО БЛОКА

Представлена удосконалена математична модель для розрахунку напружень, що виникають у клейовій плівці при розкриванні книжкового блока.

In the article are represented the improved mathematical model for calculating the tensions in the adhesive layer of the book spine during the operational use.

Технология клеевого бесшвейного скрепления (КБС) книжных блоков со срезкой корешковых фальцев наиболее применяемая при изготовлении книжно-журнальной продукции в полиграфической промышленности. Одним из важных направлений по повышению прочности книг, выполненных этим методом, является создание математической модели, которая позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние клеевого соединения в процессе эксплуатации книги.

Вопросам влияния различных технологических факторов на прочность клеевого соединения книжных блоков посвящен ряд работ [1, 4, 7, 8]. Однако самой математической модели клеевого соединения достаточного внимания не уделяется. Проведенные ранее теоретические исследования деформирования клеевой пленки книжного блока [2, 3] позволили определить исходные предпосылки к решению этой проблемы. В Институте полиграфии Варшавской политехники проводятся аналитические исследования напряжённо-деформированного состояния межлистовой зоны клеевого соединения (рис. 1) книжного блока [9]. Математическая модель изучаемой проблемы базируется на уравнениях линейной теории упругости.

При эксплуатации книги клеевой слой деформируется, в результате чего в нём возникает напряжённое состояние. Главной причиной, вызывающей рост напряжений, является раскрытие книги.

Предметом нашего изучения является клеевой слой находящейся между двумя листами книги, который опирается на сплошное упругое клеевое основание (рис. 2).

Считаем, что края клеевого слоя защемлены и поворачиваются на заданный угол q_0 при раскрытии книги. Реакция основания на слой в каждой точке может быть с известным приближением принята пропорциональной упругому прогибу $w(x)$. Это предположение соответствует модели, в которой упругое основание представляет собой так называемый набор не связанных между собой упругих пружин. Клеевой слой имеет размеры a´ b´ $2h$, где b — длина клеевого слоя (высота книги).

Для составления дифференциального уравнения цилиндрического изгиба пластины, лежащей на упругом основании, воспользуемся дифференциальными уравнениями для изгиба удлинённой прямоугольной плиты $w(x)$ (изгиб по цилиндрической поверхности) [5, 6].

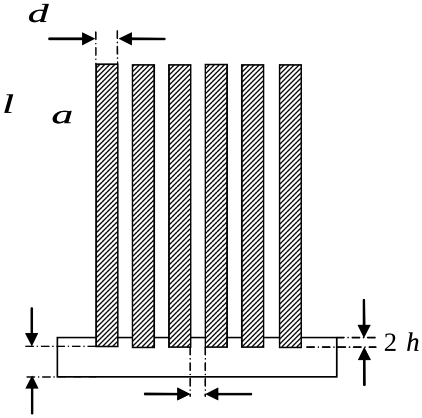

Рис. 1. Схема клеевого соединения листов в книжном блоке: *2h* — толщина клеевого слоя между листами; *l* — толщина клеевого слоя на корешке блока; *a* — ширина клеевого слоя между двумя листами; d — толщина бумажного листа

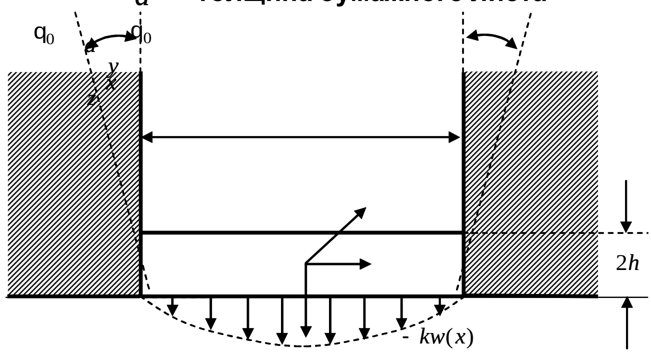

Рис. 2. Расчетная схема клеевого слоя между двумя листами книжного блока: *2h* — толщина клеевого слоя между листами; *a* — ширина клеевого слоя между листами; q_0 — угол раскрытия листов книги

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{D},$$

где $q(x)$ $(-a/2 < x < a/2)$ — нагрузка, равномерная по ширине $0 < y < b$, припадающая на единицу площади, действующая в направлении оси z; D — цилиндрическая жёсткость пластины $D = \frac{2Eh^3}{3(1-n^2)}$; E — модуль Юнга; n — коэффициент Пуассона материала клеевого слоя.

Для принятой модели нагрузкой $q(x)$ является реакция упругого основания, которую с известным приближением примем пропорциональной упругому прогибу $w(x)$ в каждой точке $q(x) = -kw(x)$. Постоянную k можно считать равной E/l, где l — толщина слоя клея (рис. 1).

Записав $D\dfrac{d^4w}{dx^4} = -kw(x)$,

получим $$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{k}{D}w(x) = 0. \tag{1}$$

Для решения задачи введём замену $4\alpha^4 = k/D$. Тогда уравнение приобретает вид

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} + 4\alpha^4 w(x) = 0. \tag{2}$$

Частными решениями дифференциального уравнения являются функции

$$W_1(x) = \cosh(\alpha x)\cos(\alpha x); \tag{3}$$

$$W_2(x) = \frac{1}{2\alpha}\left(\cosh(\alpha x)\sin(\alpha x) + \sinh(\alpha x)\cos(\alpha x)\right); \tag{4}$$

$$W_3(x) = \frac{1}{2\alpha^2}\sinh(\alpha x)\sin(\alpha x); \tag{5}$$

$$W_4(x) = \frac{1}{4\alpha^3}\left(\cosh(\alpha x)\sin(\alpha x) - \sinh(\alpha x)\cos(\alpha x)\right), \tag{6}$$

для которых имеют место следующие соотношения:

$$W_1 = \frac{dW_2}{dx};\;\; W_2 = \frac{dW_3}{dx};\;\; W_3 = \frac{dW_4}{dx}. \tag{7}$$

Общее решение дифференциального уравнения записано в виде

$$w(x) = B_1W_1(x) + B_2W_2(x) + B_3W_3(x) + B_4W_4(x). \tag{8}$$

Найдено производные общего решения (8), которые записаны с использованием соотношения (7) в виде

$$\frac{dw(x)}{dx} = -4\alpha^4 B_1W_4(x) + B_2W_1(x) + B_3W_2(x) + B_4W_3(x); \tag{9}$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -4\alpha^4 B_1W_3(x) - 4\alpha^4 B_2W_4(x) + B_3W_1(x) + B_4W_2(x); \tag{10}$$

$$\frac{d^3w(x)}{dx^3} = -4\alpha^4 B_1W_2(x) - 4\alpha^4 B_2W_3(x) - 4\alpha^4 B_3W_4(x) + B_4W_1(x); \tag{11}$$

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = -4\alpha^4 w(x). \tag{12}$$

Рассматриваемая задача сводится к решению дифференциального уравнения (2) при следующих граничных условиях:

$$w(x)\big|_{x=a/2}=0;\ -\frac{dw(x)}{dx}\bigg|_{x=a/2}=-\theta_0;\ w(x)\big|_{x=-a/2}=0;\ w(x)\big|_{x=-a/2}=0. \qquad (13)$$

Подставив найденное решение и его производные в четыре граничные условия, получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения четырёх неизвестных B_1, B_2, B_3, B_4.

$$B_1W_1(\frac{a}{2})+B_2W_2(\frac{a}{2})+B_3W_3(\frac{a}{2})+B_4W_4(\frac{a}{2})=0; \qquad (14)$$

$$-4\alpha^4B_1W_4(\frac{a}{2})+B_2W_1(\frac{a}{2})+B_3W_2(\frac{a}{2})+B_4W_3(\frac{a}{2})=\theta_0; \qquad (15)$$

$$B_1W_1(\frac{a}{2})-B_2W_2(\frac{a}{2})+B_3W_3(\frac{a}{2})-B_4W_4(\frac{a}{2})=0; \qquad (16)$$

$$4\alpha^4B_1W_4(\frac{a}{2})+B_2W_1(\frac{a}{2})-B_3W_2(\frac{a}{2})+B_4W_3(\frac{a}{2})=-\theta_0. \qquad (17)$$

Решение этой системы следующее:

$$B_1=-\theta_0\frac{W_3(\frac{a}{2})}{W_1(\frac{a}{2})W_2(\frac{a}{2})+4\alpha^4W_3(\frac{a}{2})W_4(\frac{a}{2})};\ B_2=0; \qquad (18)$$

$$B_3=\theta_0\frac{W_1(\frac{a}{2})}{W_1(\frac{a}{2})W_2(\frac{a}{2})+4\alpha^4W_3(\frac{a}{2})W_4(\frac{a}{2})};\ B_4=0. \qquad (19)$$

Знаменатель в коэффициентах (18), (19) может быть записан в виде

$$Z(\alpha a)=W_1(\frac{a}{2})W_2(\frac{a}{2})+4\alpha^4W_3(\frac{a}{2})W_4(\frac{a}{2})=\frac{1}{4\alpha}\big(\sin(\alpha a)+\sinh(\alpha a)\big). \qquad (20)$$

В результате получаем формулу для расчета прогиба клеевой пластины

$$w(x)=\frac{\theta_0}{Z(\alpha a)}\left(-W_3(\frac{a}{2})W_1(x)+W_1(\frac{a}{2})W_3(x)\right) \qquad (21)$$

Подставляя найденные постоянные (18) и (19) в (9), запишем выражение для угла наклона упругой линии (угол поворота нормали):

$$\theta(x)=-\frac{dw(x)}{dx}=-\frac{\theta_0}{Z(\alpha a)}\left(4\alpha^4W_3(\frac{a}{2})W_4(x)+W_1(\frac{a}{2})W_2(x)\right) \qquad (22)$$

С учётом (18), (19) изгибающий момент примет вид

$$M_x(x) = -D\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -D\frac{\theta_0}{Z(\alpha a)}\left(4\alpha^4 W_3(\frac{a}{2})W_3(x) + W_1(\frac{a}{2})W_1(x)\right) \qquad (23)$$

Перерезывающая сила

$$Q(x) = D\frac{d^3w(x)}{dx^3} = D\frac{4\alpha^4\theta_0}{Z(\alpha a)}\left(W_3(\frac{a}{2})W_2(x) - W_1(\frac{a}{2})W_4(x)\right) \qquad (24)$$

Напряжения σ_x вычисляются согласно формуле

$$\sigma_x(x) = \frac{z}{2h^3/3}M_x(x).$$

Максимальный прогиб клеевой пластины

$$w_{\max} = -w(0) = \frac{2\theta_0}{\alpha}\frac{\sin(\frac{\alpha a}{2})\sinh(\frac{\alpha a}{2})}{\sin(\alpha a)+\sinh(\alpha a)}. \qquad (25)$$

Максимальный момент

$$M_{\max} = -D\frac{d^2w(\frac{a}{2})}{dx^2} = -D2\alpha\theta_0\frac{\cos(\alpha a)+\cosh(\alpha a)}{\sin(\alpha a)+\sinh(\alpha a)}. \qquad (26)$$

Момент в середине клеевой пластины

$$M(0) = -D\frac{d^2w(0)}{dx^2} = -D4\alpha\theta_0\frac{\cos(\frac{\alpha a}{2})\cosh(\frac{\alpha a}{2})}{\sin(\alpha a)+\sinh(\alpha a)}. \qquad (27)$$

Максимальная перерезывающая сила достигается в сечении

$$Q_{\max} = D\frac{d^3w(\frac{a}{2})}{dx^3} = -D2\alpha^2\theta_0\frac{\sin(\alpha a)-\sinh(\alpha a)}{\sin(\alpha a)+\sinh(\alpha a)}. \qquad (28)$$

Предложенная математическая модель клеевого соединения позволяет производить расчет напряжений, возникающих в клеевой плёнке корешка при раскрывании книжного блока. Кроме того, получена возможность оценивать прочность клеевого соединения на этапе проектирования конструкции книги.

1. Гавенко С. Ф. Нормалізація технології незшивного клейового скріплення книг: теоретичні та практичні аспекти. Львів, 2002. 2. Корнилов И. К., Лебедев Ю. М., Панайоти Н. Н., Хмельник М. Н. Методика расчета напряжений в клеевом соединении листов книжного блока при бесшвейном скреплении // Тр. ВНИИполиграфмаша. Высокопроизводительное брошюровочно-переплетное оборудование. М., 1983. С. 55–64. 3. Корнилов И. К. Проектирование книжных конструкций. М., 2001. 4. Купцова О. Б. Основные режимы переплётных процессов. М., 1970. 5. Писаренко Г. С., Агаев В. А., Квитка А. Л. и др. Сопротивление материалов. К., 1986. 6. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. К., 1988. 7. Clark T. Bookbinding with adhesives. Third Edition. London, 1997. 8. Liebau D., Heinze I. Industrielle Buchbinderei. Itzehoe, 1997. 9. Petriaszwili G., Pyrjew J. An analysis of the tensions in adhesive layer during books operational use. VIII Seminar in Graphic Arts, Conference Proceeding, University Pardubice, 2007.