

ДОСЛІДЖЕННЯ КУЛАЧКОВО-ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ З УРАХУВАННЯМ АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК І ДЕМПФІРУВАННЯ

Наводимо методику розрахунку і результати дослідження динаміки деяких кулачково-важільних механізмів (КВМ), які широко застосовуються у поліграфічних машинах-автоматах. Важільним контуром КВМ може бути коромислово-повзунний (КПМ), кулісний (КМ), або шарнірний чотириланковик (ЧШВМ).

На кінематичній схемі (рис. 1) введено такі позначення: ω_2 і φ — кутова швидкість і кутове переміщення коромисла 2; I_1 , I_2 — моменти інерції ланок 1 і 2; k , μ — зведені до вала 3 коефіцієнти жорсткості і в'язкого опору КВМ; a_h , b_h , c_h — відповідно інваріанти переміщень, швидкостей, прискорень закону періодичного руху (ЗПР) коромисла 2; a_{km} , b_{km} , c_{km} — кінематичні інваріанти руху ланки 4 з урахуванням пружності і демпфірування; R , l , e — відповідно радіус коромисла 4, довжина шатуна 5, величина дезаксіалу; $\lambda = r/R$, $\delta = e/R$ — геометричні параметри КПМ; γ — кутове переміщення коромисла 4; I_n , m_n — момент інерції і маса КВМ, зведені відповідно до ланок 4 і 6; T — час однозначних переміщень веденої ланки; $k = t/T$ — відносний час; $P_1(\varphi)$, $P_2(\gamma)$ — передаточні функції.

Дослідити динамічну модель II за класифікацією праці [3] з такими припущеннями: кулачок 1 обертається з постійною кутовою швидкістю; зазори у кінематичних парах відсутні.

Диференціальне рівняння руху ланки 4 записуємо як

$$I_n \ddot{\gamma} + \mu \dot{\gamma} + k(\gamma - \varphi) = 0, \quad (1)$$

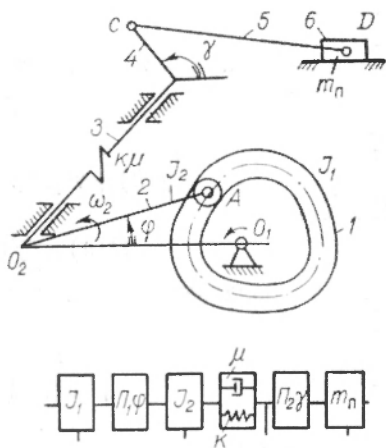


Рис. 1. Кінематична і динамічна схеми кулачково-важільного механізму.

або в безрозмірному вигляді

$$\ddot{a}_{km} + 2\pi\eta(k)\dot{a}_{km} + \nu^2\Omega(k)a_{km} = \nu^2\Omega(k)a_k, \quad (2)$$

де $\pi = 0,5 \mu T I_n^{-1}$, $\nu = T \sqrt{k I_n^{-1}}$ — коефіцієнти демпфірування і кутової частоти вільних коливань коромисла 4 [5]; $\eta(k)$, $\Omega(k)$ — функції, якими враховується нелінійний характер зміни π і ν протягом часу T .

Позначимо $\pi\eta(k)\nu^{-1} = \varepsilon(k)$. Тоді

$$\ddot{a}_{km} + 2\nu\xi(k)\dot{a}_{km} + \nu^2\Omega(k)a_{km} = \nu^2\Omega(k)a_k. \quad (3)$$

Аналіз функцій $\Omega(k)$ і $\xi(k)$ засвідчує, що для схем важільних контурів виду I, III [1] при $\nu \leq 12^\circ$ їх можна апроксимувати лінійними функціями:

$$\Omega(k) = e_0 + qk; \quad \xi(k) = (m + pk) \frac{\pi}{\nu}. \quad (4)$$

Постійні параметри e_0 , q , m , p визначаються для даної схеми КВМ. Для КВМ, які характеризуються $\pi_{2\pi} < \pi_{2k}$, параметри q і p — від'ємні (n — початок, k — кінець руху).

Введемо у ліву частину рівняння (3) підстановку

$$a_{km} = x(k) \exp \left[\nu \int_0^k \xi(k) dk \right] = x(k) e^{\left(\int_0^k \xi(k) dx \right)}. \quad (5)$$

Тоді

$$^{(1)} \chi(k) + \nu^2 [\Omega(k) - \xi^2(k) - \dot{\xi}(k)] \chi = 0. \quad (6)$$

Позначимо

$$\Omega(k) = \xi^2(k) - \dot{\xi}(k) = \omega^2(k). \quad (7)$$

Лінійно незалежні розв'язання мають такий вигляд:

$$\chi_i = \frac{c_i}{\sqrt{\omega(k)}} \left\{ \exp \left[i\nu \int_0^k \omega(k) dk \right] \right\}. \quad (8)$$

Оскільки $\omega(k) > 0$, то загальний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} \chi(k) = & \frac{c_1}{\sqrt{\omega(k)}} \left\{ \exp \left[-i\nu \int_0^k \omega(k) dk \right] \right\} + \\ & + \frac{c_2}{\sqrt{\omega(k)}} \left\{ \exp \left[-i\nu \int_0^k \omega(k) dk \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

або

$$\chi(k) = \frac{1}{\sqrt{\omega(k)}} \left\{ A \cos \left[\nu \int_0^k \omega(k) dk \right] + B \sin \left[\nu \int_0^k \omega(k) dk \right] \right\}, \quad (10)$$

де $A = C_1 + C_2$; $B = i(C_1 - C_2)$, причому A і B — дійсні коефіцієнти, а C_1 і C_2 — комплексні числа.

Загальний розв'язок лівої частини рівняння (3) запишемо як

$$a_{km} = e^{\int_0^k -v \xi(k) dk} \frac{1}{V \omega(k)} \left[A \cos v \int_0^k \omega(k) dk + \right. \\ \left. + B \sin v \int_0^k \omega(k) dk \right]. \quad (11)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (3) шукаємо у вигляді (4):

$$a_{km^2} = u_0(k) + v^{-1} u_1(k) + v^{-2} u_2(k) + \dots; \\ \dot{a}_{km^2} = \dot{u}_0(k) + v^{-1} \dot{u}_1(k) + v^{-2} \dot{u}_2(k) + \dots; \\ \ddot{a}_{km^2} = \ddot{u}_0(k) + v^{-1} \ddot{u}_1(k) + v^{-2} \ddot{u}_2(k) + \dots. \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (3) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, знаходимо:

$$u_0(k) = a_k, \quad \dot{u}_0(k) = \dot{b}_k, \quad \ddot{u}_0(k) = c_k, \quad u_1(k) = \frac{-2\xi(k) b_k}{\Omega(k)}; \quad (13)$$

$$u_2(k) = \frac{-[\ddot{u}_0(k) + 2\xi(k) \dot{u}_1(k)]}{\Omega(k)}, \quad (14)$$

де

$$\Omega(k) = e_0 + qk_1; \quad \Omega(k) = q; \quad \xi(k) = \frac{\Pi}{v} (m + pk); \\ \xi(k) = pnv^{-1}. \quad (15)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3) має такий вигляд:

$$a_{km} = \frac{e^{-v \int_0^k \xi(k) dk}}{V \omega(k)} \left[A \cos v \int_0^k \omega(k) dk + B \sin v \int_0^k \omega(k) dk \right] + \\ + a_k - \frac{2\Pi}{v^2} \frac{b_k(m + pk)}{e_0 + qk} - \frac{C_k}{v^2 (e_0 + qk)} + \frac{4\Pi^2}{v^4} (m + pk) \times \\ \times \left[\frac{c_k(m + pk) + pb_k}{(e_0 + qk)^2} - \frac{qb_k(m + pk)}{(e_0 + qk)^3} \right] + \dots. \quad (16)$$

Враховуючи границі зміни v , $\xi(k)$ і $\Omega(k)$, запишемо у рівнянні (16) члени з v^{-2}

$$a_{km} = \frac{e^{-v \int_0^k \xi(k) dk}}{V \Omega(k) - \xi^2(k) - \xi(k)} \left[A \cos v \int_0^k V \Omega(k) - \xi^2(k) - \xi(k) dk + \right.$$

$$+ B \sin \nu \int_0^k \sqrt{\Omega(k) - \frac{\pi^2}{\nu^2} \left(\frac{z}{2}\right) - \xi(k)} dk \Big] + a_k - \\ - \frac{2\pi b_k(m + pk)}{\nu^2 e_0 + qk} - c_k [\nu^2 (e_0 + dk)]^{-1} + \dots, \quad (17)$$

де A і B — постійні, які визначаються з початкових умов при $k=0$, $a_{km}=0$ і $b_{km}=0$:

$$a_{km0} = \frac{A}{\sqrt{\omega(k)}} - \frac{c_k}{\nu^2 e_0}, \\ A = \frac{c_k \sqrt{e_0 - m^2 \nu^{-2} \Pi^{-2} - p \nu^{-1} \Pi}}{e_0 \nu^2}. \quad (18)$$

Значення коефіцієнта A залежить від типу ЗПР (6) та виду діаграми прискорень важільного контура [1].

Визначимо першу похідну a_{km} .

$$b_{km} = e^{-\nu \int_0^k \xi(k) dk} \left[\frac{-\nu \xi(k) \sqrt{\omega(k)} \frac{d\sqrt{\omega(k)}}{dk}}{\omega(k)} \right] \times \\ \times \left[A \cos \nu \int_0^k \omega(k) dk + B \sin \nu \int_0^k \omega(k) dk \right] + \frac{\nu \omega(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \times \\ \times e^{-\nu \int_0^k \xi(k) dk} \left[B \cos \nu \int_0^k \omega(k) dk - A \sin \nu \int_0^k \omega(k) dk \right] + \\ + b_k - \frac{2\pi}{\nu^2} \frac{[c_k(m + pk) + pb_k](e_0 + qk)}{(e_0 + qk)^2} - [\nu(e_0 + qk)]^{-2} \times \\ \times \left[\frac{dc_k}{dk} (e_0 + qk) - qc_k \right]. \quad (19)$$

Знайдемо коефіцієнт

$$B = [\nu^3 e_0^2 \sqrt{\omega(k)}]^{-1} \left(e_0 \frac{dc_k}{dk} - \dots \right) - \frac{A}{\nu \omega(k) \sqrt{\omega(k)}}, \quad (20)$$

де

$$\left[\frac{-\nu \xi(k) \sqrt{\omega(k)}}{\omega(k)} - \frac{d\sqrt{\omega(k)}}{dk} \right] [\omega(k)]^{-1} = \\ = \frac{p \Pi^2 (m + pk)}{\nu^2 \omega(k) \sqrt{\omega(k)}} - \frac{\Pi (m + pk)}{\sqrt{\omega(k)}} - \frac{q}{2\omega(k) \sqrt{\omega(k)}}; \quad (21)$$

$$\omega(k) = \sqrt{e_0 + qk - (\Pi \nu^{-1})^2 (m + pk)^2 - \Pi \nu^{-1} p} = \\ = \sqrt{e_0 - \frac{\Pi}{\nu} p} = \frac{\Pi^2}{\nu^2} m + k \left[q - 2mp \frac{\Pi^2}{\nu^2} \right] - \frac{\Pi^3}{\nu^2} p^2 k^2. \quad (22)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} -\Pi^2 v^{-2} p^2 &= a < 0; \quad [q - 2mp\Pi^2 v^{-2}] = b; \\ e_o &= \Pi v^{-1} p - \Pi^2 v^{-2} m = c. \end{aligned} \quad (23)$$

Тоді

$$\omega(k) = \sqrt{ak^2 + bk + c}. \quad (24)$$

При виконанні умови (24) $a < 0$ і $b^2 > 4ac$ розв'язок

$$\begin{aligned} \int_0^k \omega(k) dk &= \int_0^k \sqrt{ak^2 + bk + c} dk \text{ знаходимо у вигляді} \\ \int_0^k \omega(k) dk &= \frac{2ak + b}{4a} \sqrt{ak^2 + bk + c} \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{-a}} \times \\ &\times \arcsin \frac{2ak + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \int_0^k = \frac{2ak + b}{4a} \sqrt{ak^2 + bk + c} + \\ &+ \frac{b^2 - 4ac}{8a - a} \arcsin \frac{2ak + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} - \frac{b}{4a} \sqrt{c} - \\ &- \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{-a}} \arcsin \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для дійсності $\sqrt{c}$ необхідно, щоб виконувалась умова

$$e - \left(\frac{\Pi}{v}\right) p - \left(\frac{\Pi}{v}\right)^2 m > 0. \quad (26)$$

При $\Pi = 0$

$$\begin{aligned} a_{km} &= \frac{1}{\sqrt{\omega(k)}} \left[A \cos v \int_0^k \omega(k) dk + B \sin v \int_0^k \omega(k) dk \right] + \\ &+ a_k - c_k [v^2(e + dk)]^{-1}, \end{aligned} \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \sqrt{e + qk}; \quad A = c_k \sqrt{e} v^{-2} e^{-1}; \\ B &= \frac{qc_k(0,5\sqrt{e} + 1) + e \frac{dc_k}{nk}}{v^3 e^{-1} \sqrt{e}}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{da_{km}}{dk} = b_{km} = \frac{q}{4\sqrt{\omega^3(k)}} \left[A \cos v \int_0^k \omega(k) dk + B \sin v \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^k \omega(k) dk \Big] + \frac{\nu \omega(k)}{\omega(k)} \left[B \cos \nu \int_0^k \omega(k) dk - A \sin \nu \times \right. \\ & \left. \times \int_0^k \omega(k) dk \right] + bk + \frac{qc_k}{\nu^2 (e + qk)^2} - \frac{dc_k}{dk} [\nu^2 (e + dk)]^{-1}; \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_{km}}{dk^2} = c_{km} = & \left[\frac{-3q^2 - 16\omega^5(k)\nu^2}{16\omega^3(k)V\omega(k)} \right] \left[A \cos \nu \int_0^k \omega(k) dk + \right. \\ & \left. + B \sin \nu \int_0^k \omega(k) dk \right] + \frac{q\nu}{4V\omega(k)} \left(\frac{1}{V\omega(k)} \right) \left[B \cos \nu \times \right. \\ & \left. \times \int_0^k \omega(k) dk - A \sin \nu \int_0^k \omega(k) dk \right] + c_k - \frac{2q^2 c_k}{\nu^2 (e_0 + qk)^3} + \\ & + 2q \frac{dc_k}{dk} [\nu^2 (e_0 + qk)^2]^{-1} - \frac{d^2 c_k}{dk^2} [\nu^2 (e + qk)]^{-1}. \quad (30) \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\omega(k) = e_0 + qk$ і $\int_0^k \omega(k) dk = \left| \frac{2}{3q} (e_0 + qk)^{\frac{3}{2}} \right|_0^k$, отримуюмо

$$\begin{aligned} a_{km} \sqrt{\frac{1}{e + dk}} \left\{ A \cos \left[\frac{2\nu}{3q} (e_0 + qk)^{\frac{3}{2}} + B \sin \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{2\nu}{3q} (e_0 + qk)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} + a_k - \frac{c_k}{\nu^2 (e_0 + qk)}. \quad (31) \end{aligned}$$

Для схем КВМ типу II коефіцієнти ν , Π і $\Pi_2(\nu)$ постійні, рівняння (3) набуває вигляду

$$\ddot{a}_{km} + 2\Pi \dot{a}_{km} + \nu^2 a_{km} = \nu^2 a_k. \quad (32)$$

Якщо права частина рівняння (32) задана степеневим поліномом

$$a_k = q_0 + q_1 k + q_2 k^2 + q_3 k^3 \dots + q_i k^i \dots + q_n k^n, \quad (33)$$

то частковий розв'язок також шукається у вигляді полінома (5)

$$W_k = Q_0 + Q_1 k + Q_2 k^2 + \dots + Q_i k^i \dots + Q_n k^n. \quad (34)$$

Після підстановки (33) і (34) у загальний розв'язок (32) одержимо

$$q_{km} = e^{-\Pi k} (C_1 \cos \nu_1 k + C_2 \sin \nu_1 k) + W_k, \quad (35)$$

де

$$\nu_1 = \sqrt{\nu^2 - \Pi^2}; \text{ а } W_k = f(k).$$

Коефіцієнти полінома функцій переміщення коромисла 4

$$Q_i = q_i - 2Pv^{-2}(i+1)Q_{(i+1)} - (i+1)(i+2)v^{-2}Q_{(i+2)}, \quad (36)$$

$$C_1 = -Q_0, \quad C_2 = (PC_1 - Q_1)\gamma_1^{-1}, \quad (37)$$

при $n > i \quad (i+1) \neq (i+2) \neq 0$.

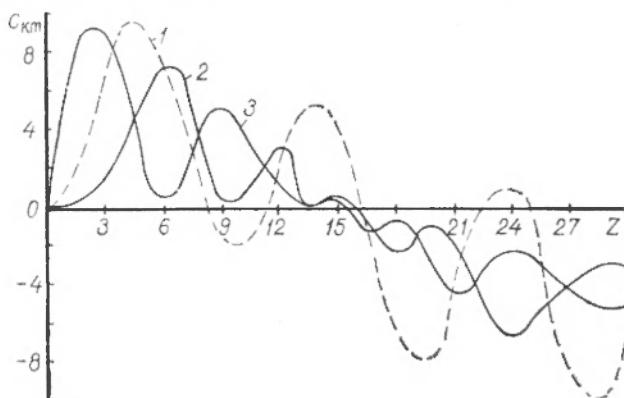


Рис. 2. Характер зміни прискорень c_{km} коромисла 4 КВМ при $P=0$; $v=20$; 1 — $e=1$; $q=0$; 2 — $e=2$; $q=-1$; 3 — $e=4$; $q=-3$.

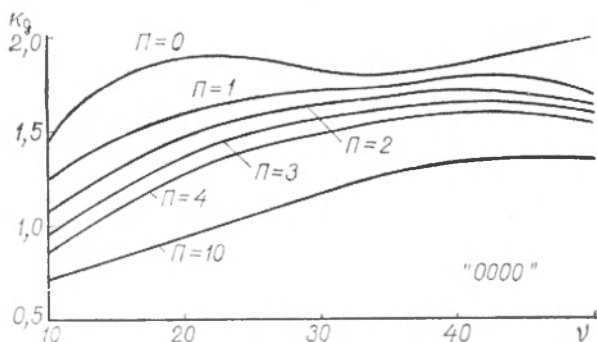


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів динамічності $K_d = f(v, P)$ для ЗПР «діаграма прискорень «0000».

Параметри руху веденої ланки 6 кулачково-важільного механізму визначаємо з рівнянь:

$$S_{6m} = f(\gamma, R, \lambda, \delta); \quad V_{6m} = V_{Di} \dot{\gamma} R; \quad W_{6m} = [W_{Di}(\dot{\gamma})^2 + \dot{\gamma} V_{Di}] R, \quad (38)$$

де V_{Di} , W_{Di} — інваріанти швидкості і прискорення повзуна КВМ [6], $\gamma = a_{km} \gamma_\Sigma$, $\dot{\gamma} = b_{km} \gamma_\Sigma T^{-1}$, $\ddot{\gamma} = c_{km} \gamma_\Sigma T^{-2}$ — відповідно переміщення, швидкість, прискорення ланки 4.

За наведеною методикою виконані параметричні дослідження по визначенню впливу жорсткості ланок і демпфірування на закони періодичного руху ведених мас.

Наведемо деякі результати досліджень. На рис. 2 показаний характер зміни прискорень c_{k-n} коромисла 4 для ЗПР — «К» при $v=20$, $P=0$ і $e_1 q = \text{varia}$. Динамічна система зі змінними параметрами v і P якісно і кількісно змінює ЗПР, характерний для КВМ, в яких v і $P = \text{const}$. На рис. 3 показаний характер зміни коефіцієнтів динамічності (K_d) в функції v і $P = \text{varia}$. Використання такої інформації допоможе конструкторам визначати оптимальні параметри механізмів.

Список літератури: 1. Бойко А. В. Критериальная механика кулачково-рычажных механизмов: Автореф. дис. ...канд. техн. наук. — Киев, 1975. 2. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамика машин. — М.: Машиностроение, 1968. 3. Главацкий А. С. Вопросы оптимизации синтеза кулачково-рычажных механизмов: Автореф. дис. ...канд. техн. наук. — Львов, 1969. 4. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969. 5. Саввин Э. А. Синтез закона движения инерционных кулачковых механизмов с учетом упругости звеньев ведомой системы: Автореф. дис. ...канд. техн. наук. — Львов, 1967. 6. Смолянский М. Л. Таблицы неопределенных интегралов. — М.: Физматгиз, 1961. 7. Тур К. В. Механика полиграфических автоматов. — М.: Книга, 1965.

A. V. BOYKO, A. I. PETRUK

CALCULATION OF THE CAM-LEVER MECHANISMS UNDER THE AMPLITUDE — FREQUENTATIVE CHARACTERISTIC AND DAMPING

Summary

The article deals with the methods of calculation of the cam-lever mechanisms whereas the elasticity of the links and damping are taken into consideration. Some results of the investigation of the mechanisms dynamics are touched upon.

Стаття надійшла в редколегію 5. 09. 1979 р.