

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДРУКАРСЬКИХ ФОРМ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ОБОЛОНОК

У поліграфічній промисловості як друкарські форми застосовують стереотипи (рис. 1), що кріпляться на формних циліндрах і обертаються разом з ними. Під дією центробіжної сили I від маси стереотипів і тиску друку P стереотипи можуть деформуватись, що призводить до погіршення якості друку, стирання стереотипів і навіть їх руйнування.

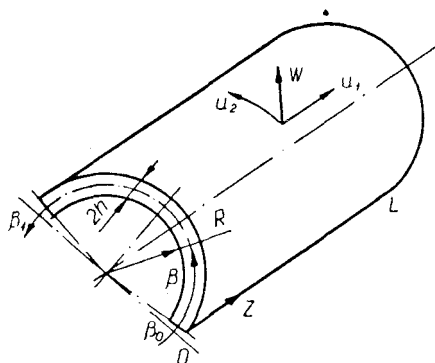


Рис. 1. Розрахункова схема друкарської форми.

Як відомо, теоретичні дослідження прогинів стереотипу проводили [1], розглядаючи його як балку, що лежить на двох опорах. Результати досліджень не завжди відповідали експерименту [4].

Для математичного моделювання та дослідження пружно-деформованого стану стереотипу ми застосовуємо теорію пружності оболонок [2].

Вихідні рівняння для визначення пружно-деформованого стану оболонки включають чотири групи співвідношень: співвідношення, що характеризують геометрію оболонки в процесі її деформування; співвідношення, які описують фізичні властивості матеріалу

стереотипу; рівняння руху (рівноваги); початкові та крайові умови.

Віднесемо оболонку стереотипу до системи координат (z, β, γ) , де z — координата по довжині ($0 \leq z \leq L$); β — полярний кут по дузі ($\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$); γ — координата по нормалі до серединної поверхні ($-h \leq \gamma \leq h$); $2h$ — товщина стереотипу.

Рівняння зв'язку між компонентами переміщень U_1, U_2, W і компонентами деформації $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ точок серединної поверхні мають вигляд:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial U_2}{\partial \beta} + \frac{W}{R}, \quad \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta} - U_2 \right), \\ \kappa_{12} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta} - U_2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

де R — радіус серединної поверхні (величини з індексом 1 відповідають напрямку координати z , з індексом 2 — координаті β).

Зв'язок між компонентами деформацій, зусиллями N_1, N_2, S_{12} і моментами M_1, M_2, H_{12} у фізичних співвідношеннях пружності оболонки

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{D_0}{1-\nu^0} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2), \quad N_2 = \frac{D_0}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1), \quad S_{12} = \frac{D_0}{1-\nu} \epsilon_{12}, \\ M_1 &= D_1 (\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D_1 (\kappa_2 + \nu \kappa_1), \\ H_{12} &= D_1 (1-\nu) \kappa_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$D_1 = \frac{2}{3} \frac{E h^3}{1-\nu^2}; \quad D_0 = 2Eh,$$

E — модуль пружності матеріалу стереотипу; ν — коефіцієнт Пуассона.

Рівняння руху точок оболонки в процесі деформації мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{12}}{\partial \beta} &= -q_1 + \rho_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial H_{12}}{\partial z} \right) &= \\ = -q_2 - \frac{m_2}{R} + \rho_1 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} + \frac{\rho_2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial \tau} - \frac{\partial U_2}{\partial \tau} \right), \\ N_2 - R \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H_{12}}{\partial z} \right) &= \\ = R \left\{ q_n + \frac{\partial m_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_2}{\partial \beta} + \rho_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\rho_2}{R} \times \right. \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(R \frac{\partial^3 W}{\partial z \cdot \partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \tau} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \beta} - \frac{1}{R} U_2 \right) \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\rho_1 = 2h\rho; \rho_2 = \frac{2}{3}h^3\rho;$$

ρ — густина матеріалу стереотипу; τ — параметр часу; q_1, q_2, q_n, m_1, m_2 — компоненти зовнішнього силового та моментного навантаження на одиничний елемент серединної поверхні оболонки стереотипу. Навантаження q_n — прикладене по нормалі до стереотипу.

Напруження в стереотипі визначають за формулами

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2h} \left(N_1 + 3M_1 \frac{\gamma}{h^2} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{1}{2h} \left(N_2 + 3M_2 \frac{\gamma}{h^2} \right),$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2h} \left(S_{12} + 3H_{12} \frac{\gamma}{h^2} \right).$$

Потрібно записати умови по краях стереотипу, що відповідають способам його кріплення. Для запису крайових умов у загальному вигляді вводять поняття взаємно відповідних сил і переміщень. Вздовж ліній $z=0$, або $z=L$ взаємно відповідними є пари

$$(N_1, U_1), \quad \left(S_{12} + \frac{2}{R} H_{12}, U_2 \right),$$

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} + m_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{12}}{\partial z}, W \right), \quad \left(M_1, \frac{\partial W}{\partial z} \right), \quad (4a)$$

а по лінії $\beta=\beta_0$, або $\beta=\beta_1$ пари

$$(N_2, U_2), (S_{12}, U_1), \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H_{12}}{\partial z} + m_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial z}, W \right),$$

$$\left(M_2, \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \beta} - U_2 \right). \quad (4b)$$

Якщо, наприклад, границі $\beta=\beta_0$ і $\beta=\beta_1$ стереотипу жорстко закріплені, то на них виконуються умови $U_1=0$,

$$U_2 = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0,$$

а коли границі $z=0$ і $z=L$ вільні, то на них повинні виконуватись умови $N_1=0$,

$$S_{12} + \frac{2}{R} H_{12} = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} + m_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{12}}{\partial z} = 0, \quad M_1 = 0.$$

Співвідношення (1)—(3) разом з умовами (4a, б) складають повну систему рівнянь для визначення у стереотипі переміщень, деформацій і напружень.

Для розв'язку задачі (1)—(4) вигідно спочатку звести до трьох диференціальних рівнянь відносно переміщень. Підставляючи

співвідношення (1) в (2), а далі в рівняння (3), одержуємо систему відносно U_1, U_2, W :

$$\frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2R(1-\nu)} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z \partial \beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)R} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1+\nu}{2Eh} \left(2h\rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - q_1 \right), \quad (5)$$

$$- \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 W}{\partial \beta^3} + \frac{(2-\nu)}{R^2} \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial \beta} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{3}{h^2} + \frac{1}{R^2} \right) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2} + \left(3 \frac{(1-\nu)}{h^2} + 3 \frac{(1-\nu)}{R^2} \right) \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} + \frac{3}{R^2 h^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial z} + \frac{3}{h^2 R^2} \frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3} \times$$

$$\times \left\{ -q_2 - \frac{m_2}{R} + 2h\rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} + \frac{2}{3} h^2 \rho \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \beta \partial \tau^2} - \frac{\partial U_2}{\partial \tau} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$R \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \beta^4} + \frac{2}{R} \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \beta^2} - \frac{2-\nu}{R} \frac{\partial^3 U_2}{\partial z^2 \partial \beta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 U_2}{\partial \beta^3} + \frac{3}{h^2 R} \frac{\partial U_2}{\partial \beta} + \frac{3\nu}{h^2} \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{3}{h^2 R} W = R \left\{ q_n + \frac{\partial m_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_2}{\partial \beta} + 2R h \rho \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{2}{3} h^2 \rho \left[R \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial \beta^2 \partial \tau^2} - \frac{\partial^3 U_2}{\partial \beta \partial \tau^2} \right) \right] \right\} \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3}. \quad (7)$$

Для чисельного розв'язку задачі (5), (6), (7), (4) на ЕОМ здійснюємо перехід до дискретного аналогу. Для цього область стереотипу розбиваємо прямокутною сіткою з кроком h_z по координаті z , h_β — по координаті β . Параметр часу τ також дискретизуємо з кроком h_τ . Позначимо через k_1, k_2, k_3 — кількість розбиття по координатах z, β, τ . Функції U_1, U_2, W у вузлах розбиття i, j стереотипу апроксимуємо дискретними. Похідні, що входять в систему (5), (6), (7), замінюємо скінченими різницями підвищеної точності [3], наприклад:

$$\frac{\partial W_{i,j}}{\partial z} = \frac{1}{12h_z} (W_{i-2,j} - 8W_{i-1,j} + 8W_{i+1,j} - W_{i+2,j}),$$

$$\frac{\partial^2 W_{i,j}}{\partial z^2} = \frac{1}{24h_z^2} (-2W_{i-2,j} + 32W_{i-1,j} - 60W_{i,j} + 32W_{i+1,j} - 2W_{i+2,j}),$$

$$\frac{\partial^3 W_{i,j}}{\partial z^3} = \frac{1}{8h_z^3} (W_{i-3,j} - 8W_{i-2,j} + 13W_{i-1,j} - 13W_{i+1,j} + 8W_{i+2,j} - W_{i+3,j}),$$

$$\frac{\partial^4 W_{i,j}}{\partial z^4} = \frac{1}{6h_z^4} (-W_{i-3,j} + 12W_{i-2,j} - 39W_{i-1,j} + 56W_{i,j} - 39W_{i+1,j} + 12W_{i+2,j} - W_{i+3,j}). \quad (8)$$

Аналогічно записуємо похідні по координатах β і τ . При цьому змінюються індекси j і, наприклад, n для координати τ . При заміні похідних, що входять в граничні умови (4), використовуємо неметричні скінченні різниці [3].

Таким чином одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень U_1, U_2, W у вузлах розбиття i, j, n ($i = \overline{1, k_1}, j = \overline{1, k_2}, n = \overline{1, k_3}$). Для її розвитку вигідно використати метод релаксації [5], який вимагає попереднього задання наближених значень

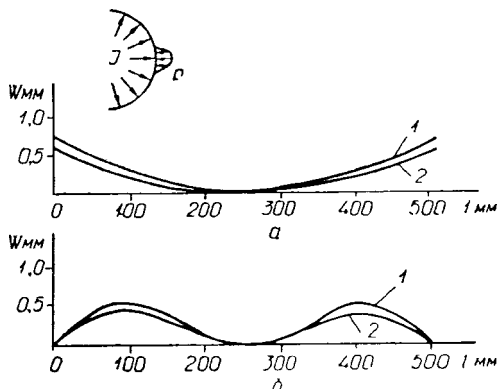


Рис. 2. Графіки прогинів друкарських форм в момент дії сили натиску друку по середині довжини їх дуги:

a — фасетне кріплення; b — чотиристоронне кріплення (товщина друкарських форм: 1 — 11 мм; 2 — 9 мм).

переміщень $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, W^{(0)}$. Алгоритм ітераційного розв'язку системи має такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_1^{(m+1)} &= U_1^{(m)} + \alpha_{U_1} R_{U_1}^{(m)}, & U_2^{(m+1)} &= U_2^{(m)} + \alpha_{U_2} R_{U_2}^{(m)}, \\ W^{(m+1)} &= W^{(m)} + \alpha_W R_W^{(m)}, & m &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

де $R_{U_1}^{(m)}, R_{U_2}^{(m)}, R_W^{(m)}$ — невязки дискретних рівнянь (5), (6), (7) на m -му кроці обчислень; $\alpha_{U_1}, \alpha_{U_2}, \alpha_W$ — множники релаксації для прискорення процесу обчислень. Точність обчислень переміщень перевіряємо шляхом розбиття стереотипу іншою густішою сіткою.

Як приклад дослідження проводили для стереотипів з внутрішнім діаметром 356 мм, довжиною по твірній $L=408$ мм, кутом охоплення $\beta_1 - \beta_0 = 176^\circ$, для товщин $2h=11$ мм і $2h=9$ мм. Механічні параметри матеріалу стереотипу: $E=257000$ кг/см², $\nu=0,3$. Швидкість обертання формного циліндра 48000 об/год, відцентрова сила інерції $I=1854$ кГ для товщини 9 мм і $I=2241$ кГ для товщини 11 мм. Силу натиску друку приймали $P=60$ кГ/см. Розрахунки на ЕОМ М40=30 проводили для двох умов кріплення стереотипу: 1) фасетне тільки на дугах; 2) чотиристоронне фасетне.

На рис. 2 показані графіки прогину W по лінії $z = \frac{L}{2}$ стереотипу

(рис. 2, а — кріплення тільки по дугах, рис. 2, б — кріплення чотиристороннє). Максимальний натиск друку при $\beta = 88^\circ$ (лінія 1 відповідає товщині 11 мм, 2 — товщині 9 мм).

На рис. 3 показані аналогічні результати, коли максимальний натиск при $\beta = 0^\circ$.

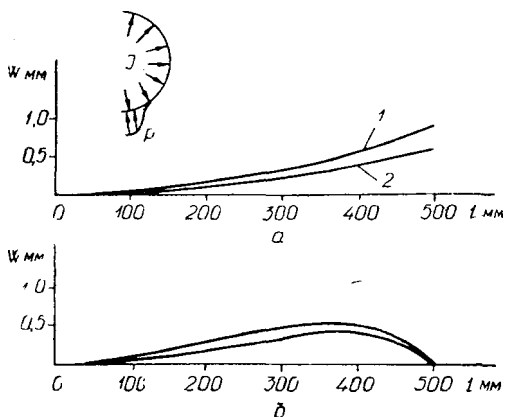


Рис. 3. Графіки прогинів друкарських форм в моменті дії сили натиску друку в зоні початку друку:

а — фасетне кріплення; б — чотиристороннє кріплення (товщина друкарських форм 1 — 11 мм, 2 — 9 мм).

На основі результатів математичного експерименту встановлено, що зі зменшенням товщини стереотипу прогин зменшується за рахунок спаду відцентрової сили інерції; при чотиристоронньому кріпленні прогини в стереотипі менші, ніж при двосторонньому.

Список літератури: 1. Бушунов В. Т. Печатные машины. — М.; Л.: Машгиз, 1963. 2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. 3. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. — М.: Наука, 1964. 4. Куропас Р. С., Васильев И. В., Рижов В. І. Динаміка систем закріплення стереотипів. — Поліграфія і видавнича справа, 1977, № 13. 5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.

On the base of the theory of elasticity there are described the results of mathematical modeling and researching of the state of deformed elasticity of printing forms; authors take into consideration the geometrie parameters of the forms, physical properties of the material, equalisation of movement, starting and boundary conditions.

Стаття надійшла в редколегію 18. 12. 83