

УДК 539.3:681.1.05

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ПЕРЕХІДНИХ ПОЛІВ ТЕМПЕРАТУРИ І ПОТЕНЦІАЛУ ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ В ПРОЦЕСІ КОНДУКТИВНОГО СУШІННЯ КАРТОНУ

Я. Ю. Коляно, Т. С. Сасс

*Українська академія друкарства,
Вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна*

Запропоновано підхід до вивчення процесів нагрівання та сушіння деяких типів поліграфічних матеріалів, заснований на теорії нестационарної тепловологопровідності, розвинутої школою акад. Ликова О. В. Апробацію виконано для кондуктивного (контактного) сушіння картонної пластини. Результати чисельних досліджень можна застосовувати на практиці під час вивчення процесів тепловологоперенесення у будь-яких капілярно-пористих колоїдних матеріалах, внаслідок чого можлива оптимізація технологічних режимів сушіння і забезпечення необхідних якісних показників продукції як для поліграфічної галузі, так і для інших галузей промисловості.

Ключові слова: *кондуктивне та конвективне сушіння, нестационарна тепловологопровідність, математична модель, початково-крайова задача, інтегральне перетворення Лапласа, градієнти потенціалів тепловологоперенесення, термодинамічні параметри, картон, капілярно-пористі колоїдні матеріали, поліграфічна галузь.*

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Значна кількість поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів піддаються сушінню та тепловій обробці на різних етапах поліграфічного виробництва. Сушіння за природних умов значно збільшує тривалість технологічного процесу, а тому необхідно застосовувати штучне висушування. Проблеми сушіння досліджували багато вчених, серед яких слід виокремити дослідження О. В. Ликова [1], Ю. А. Михайлова [2], П. О. Ребіндера, П. С. Коссовича, М. В. Кірпи́чова, П. П. Луцика, Н. В. Павлюкевича, С. П. Рудобашти, Г. С. Шубі́на, А. Н. Алабовського, А. І. Ольшанського [3, 4], Л. М. Нікітіної, Б. І. Гайвася, П. В. Білея, І. М. Озарківа [5, 6], Я. І. Соколовського, Б. С. Сажина, З. Паковські [7], С. Ковальські, А. Рибіцкі [8, 9], К. Н. Рея, Р. Н. Панді [10] та інших, зокрема в поліграфічній галузі необхідно відзначити роботи В. В. Краснікова [11], Д. В. Воробйова [12], С. Ф. Гавенко [13, 14], Л. А. Коптюха [15, 16], М. М. Луцківа, І. Т. Стрепка [17], В. В. Шибанова, Л. А. Загарінської [18] та інших. Незважаючи на значну кількість робіт у цьому напрямі, ряд завдань, пов'язаних зі штучним висушуванням поліграфічних матеріалів, залишаються нерозв'язаними. З розвитком інформаційних технологій відкриваються нові можливості дослідження процесів сушіння у поліграфії [19]. Застосування інформаційних технологій у поліграфіч-

них процесах вивчали Б. В. Дурняк, М. М. Луцків, В. М. Сеньківський, Л. С. Сікора, І. В. Огірко, М. В. Шовгенюк та інші [19].

Постановка проблеми. У сучасному поліграфічному виробництві широко застосовують конвективний, кондуктивний та променевий способи сушіння [12, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24]. Якщо загалом кількість досліджень конвективного сушіння є доволі значною, то кондуктивне вивчене менше, особливо щодо поліграфічних матеріалів. Ще менше вивченим є променевий спосіб. Дослідження переваг різних способів сушіння сприятиме правильному вибору конструкції та режиму роботи відповідних сушарок із урахуванням особливостей висушуваного матеріалу та подальшому керуванню цими процесами. Відомі дослідження демонструють, що сушарки, які використовують у виробництві, мають недоліки, пов'язані із недостатнім просушуванням вологих напівфабрикатів і надмірною затратою теплоенергії [13]. Тому процеси сушіння потребують додаткових теоретичних досліджень.

У зв'язку з цим, актуальним для вдосконалення технологій теплової обробки, розроблення методів управління тепловими процесами, які відбуваються в різноманітних поліграфічних системах, з метою отримання готового продукту чи напівфабрикату якомога вищої якості, скорочення тривалості процесу, а також оптимізації енергозатрат, є розвиток аналітичних методів дослідження процесів нагрівання та сушіння, які базуються на теоріях теплопровідності, тепломасоперенесення і фізико-хімічній механіці матеріалів [1]. Інтегральне перетворення Лапласа, яке використовується під час розв'язання розглянутих у роботі нестационарних задач термовологопровідності, дає змогу знайти аналітичні розв'язки у зручній замкнутій формі, яка уможливорює ефективне дослідження впливу окремих параметрів на хід процесу та знаходити співвідношення між найважливішими показниками. Відомі пакети символьної математики (Mathematica, MatLab, MathCad, Maple) та моделювання фізичних процесів (COMSOL, ANSYS) на сьогодні не дають можливості знаходити аналітичний розв'язок дослідженої у цій роботі задачі термовологопровідності [19].

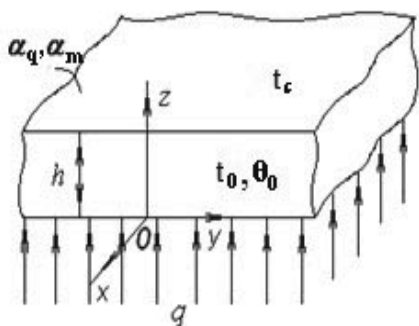
У статті розв'язано нестационарну задачу кондуктивної термовологопровідності щодо сушіння картонної пластини (кондуктивне сушіння), отримано графіки розподілу температури і потенціалу вологоперенесення в часі. Кондуктивним (контактним) сушінням називається процес висушування матеріалу на твердій нагрітій поверхні, коли тепло, необхідне для випаровування вологи і нагрівання матеріалу, передається безпосередньо від гарячої поверхні, а волога поглинається і евакуується оточуючим середовищем — повітрям чи іншим проміжним середовищем [1, 11]. Кондуктивний спосіб підводу тепла у поліграфічному виробництві використовується при: виготовленні паперу і картону (барабанний спосіб) [1, 11, 18], крейдуванні або проклеювання паперу [18], припресуванні полімерних плівок [14], контактному обігріві корінця книжкового блоку [12, 17], сушінні відбитків у багатофарбових машинах глибокого друку [17] тощо. У процесі розв'язання задач кондуктивної термовологопровідності дослідники стикаються з труднощами. Вивчення цього способу сушіння триває [21, 25, 26]. Раніше було розв'язано не-

стаціонарну задачу конвективної термовологопровідності щодо сушіння картону й отримано відповідні графіки [27, 28].

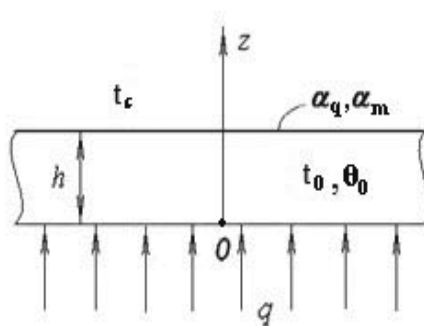
Мета статті — розв'язання нестационарної задачі термовологопровідності щодо кондуктивного сушіння поліграфічних матеріалів; побудова графіків розподілу температури і потенціалу вологоперенесення в часі у процесі кондуктивного сушіння картону різної товщини.

Виклад основного матеріалу дослідження. Постановку нестационарної задачі кондуктивної термовологопровідності здійснено на основі теорії тепломасообміну, розвинутої у працях О. В. Ликова [1, 2], Ю. М. Коляно [29], а також робіт В. В. Краснікова [11], М. І. Маковозова, С. Бруїна [30], М. Д. Михайлова, Б. К. Шиседжієва [31]. Слід зазначити, що математично задача кондуктивної термовологопровідності є значно складнішою від конвективної [28], оскільки під час її розв'язання, внаслідок асиметричності граничних умов, виникають громіздкіші обрахунки.

Фізична постановка задачі. Розглядається волога необмежена пластина товщиною h , верхня поверхня якої взаємодіє з навколишнім середовищем згідно з законом конвективного термовологообміну, а нижня поверхня нагрівається тепловим потоком q (рис. 1). Початкова температура t_0 , потенціал вологоперенесення θ_0 . Потрібно: знайти розподіли температури та потенціалу вологоперенесення у довільній точці пластини залежно від часу; визначити величини градієнтів температури і потенціалу вологоперенесення між поверхнями пластини залежно від часу; встановити час висушування пластини.



а)



б)

Рис. 1. Схема перерізу пластини, яка кондуктивно висушується тепловим потоком:

а) тривимірна; б) двовимірна

Математичну постановку задачі здійснено згідно з теорією нестационарної термовологопровідності О. В. Ликова та розглянуто у вигляді початково-крайової задачі (1)–(4) для безрозмірних температури $T(Z, Fo)$ і потенціалу вологоперенесення $\Theta(Z, Fo)$ [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - Ko^* \frac{\partial \Theta}{\partial Fo}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = Lu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} - LuPn \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}. \end{cases} \quad (1)$$

$$T(Z, 0) = 0, \quad \Theta(Z, 0) = 0, \quad Fo = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Z} + Ki_q(Fo) = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Z} - Pn \frac{\partial T}{\partial Z} = 0, \quad Z = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial Z} - Bi_q[1 - T(1, Fo)] + (1 - \varepsilon)KoLuBi_m[1 - \Theta(1, Fo)] &= 0, \quad Z = 1; \\ -\frac{\partial \Theta}{\partial Z} + Pn \frac{\partial T}{\partial Z} + Bi_m[1 - \Theta(1, Fo)] &= 0, \quad Z = 1; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{де } T = \frac{t - t_0}{t_c - t_0}, \quad \Theta = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 - \theta_p}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad Fo = \frac{a_q \tau}{h^2}, \quad Bi_q = \frac{\alpha_q h}{\lambda_q}, \quad Bi_m = \frac{\alpha_m h}{\lambda_m} = \frac{\beta h}{a_m}, \quad Lu = \frac{a_m}{a_q},$$

$$Ko = \frac{r(u_0 - u_p)}{c_q(t_c - t_0)}, \quad Pn = \frac{\delta(t_c - t_0)}{u_0 - u_p}, \quad Ki_q(Fo) = \frac{h \cdot q}{\lambda_q(t_c - t_0)}, \quad \varepsilon - \text{критерій фазового пере-}$$

творення; $Ko^* = \varepsilon Ko$, h – товщина пластини, м; τ – час, с; t – температура, °C; t_0, t_c – початкова температура пластини і температура навколишнього середовища, °C; θ – потенціал вологоперенесення, °B; θ_0, θ_c – початкове і рівноважне значення потенціалу вологоперенесення пластини, °B; u – вологовміст, кг/кг; u_0, u_p – початковий і рівноважний вологовміст пластини, кг/кг; q – густина теплового потоку, Вт/м²; a_q – коефіцієнт температуропроводності, м²/с; a_m – коефіцієнт потенціалопровідності вологоперенесення, м²/с; α_q – коефіцієнт теплообміну, Вт/м²°C; α_m – коефіцієнт вологообміну, кг/м²с°B; β – коефіцієнт масообміну, віднесений до різниці питомих масовмістів, м/с; λ_q – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м°C; λ_m – коефіцієнт вологопровідності, кг/мс°B; c_q – об'ємна теплоємність, Дж/кг°C; δ – термодифузійний коефіцієнт, 1/°C; r – об'ємна теплота фазового переходу води, Дж/кг. Зв'язок потенціалу вологоперенесення і вологовмісту задається співвідношенням $\theta = (u / u_p) \cdot 100$, де u – вологовміст матеріалу, u_p – максимальний гігроскопічний вологовміст матеріалу [1, 5]. Задача (1)–(4) безрозмірена з метою зменшення числа термодинамічних параметрів матеріалу, з якого виготовлена пластинка, у подальших чисельних обрахунках. Вивчення поведінки цих семи основних безрозмірних параметрів (а кожен з них має свою фізичну суть) дозволяє зрозуміти у якій мірі кожен з них впливає на процес, тобто дозволяє більш глибоко (через меншу кількість параметрів) розкрити фізичну суть розглядуваного процесу сушіння [1, 2].

Застосовуючи до задачі (1)–(4) інтегральне перетворення Лапласа [2]:

$$\bar{T}(Z, s) = \int_0^\infty T(Z, Fo) e^{-sFo} dFo, \quad \bar{\Theta}(Z, s) = \int_0^\infty \Theta(Z, Fo) e^{-sFo} dFo,$$

після врахування початкових умов (2), отримуємо задачу в трансформантах:

$$\begin{cases} s\bar{T}(Z,s) = \frac{d^2\bar{T}(Z,s)}{dZ^2} - \text{Ko}^* s\bar{\Theta}(Z,s), \\ s\bar{\Theta}(Z,s) = \text{Lu} \frac{d^2\bar{\Theta}(Z,s)}{dZ^2} - \text{LuPn} \frac{d^2\bar{T}(Z,s)}{dZ^2}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{T}(0,s)}{dZ} + \bar{\text{Ki}}_q(\text{Fo}) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{\Theta}(0,s)}{dZ} - \text{Pn} \frac{d\bar{T}(0,s)}{dZ} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{T}(1,s)}{dZ} - \text{Bi}_q \left[\frac{1}{s} - \bar{T}(1,s) \right] + (1-\varepsilon) \text{KoLuBi}_m \left[\frac{1}{s} - \bar{\Theta}(1,s) \right] = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{d\bar{\Theta}(1,s)}{dZ} + \text{Pn} \frac{d\bar{T}(1,s)}{dZ} + \text{Bi}_m \left[\frac{1}{s} - \bar{\Theta}(1,s) \right] = 0. \quad (9)$$

Розв'язуючи систему (5) отримуємо диференціальне рівняння для знаходження зображення температури

$$\frac{d^4\bar{T}}{dZ^4} - s \left(1 + \text{Ko}^* \text{Pn} + \frac{1}{\text{Lu}} \right) \frac{d^2\bar{T}}{dZ^2} + \frac{s^2}{\text{Lu}} \bar{T} = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\bar{T}(Z,s) = A_1 e^{\sqrt{s}v_1 Z} + A_2 e^{\sqrt{s}v_2 Z} + A_3 e^{-\sqrt{s}v_1 Z} + A_4 e^{-\sqrt{s}v_2 Z}, \quad (10)$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 — довільні постійні, v_1, v_2 визначаються зі співвідношення

$$v_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \text{Ko}^* \text{Pn} + \frac{1}{\text{Lu}} \mp \sqrt{\left(1 + \text{Ko}^* \text{Pn} + \frac{1}{\text{Lu}} \right)^2 - \frac{4}{\text{Lu}}} \right).$$

Зображення для потенціалу вологоперенесення, після застосування формули (10) і формули, яка слідує із першого рівняння системи (5), набуде вигляду

$$\bar{\Theta}(Z,s) = -\frac{1}{\text{Ko}^*} \left[A_1 (1-v_1^2) e^{\sqrt{s}v_1 Z} + A_2 (1-v_2^2) e^{\sqrt{s}v_2 Z} + A_3 (1-v_1^2) e^{-\sqrt{s}v_1 Z} + A_4 (1-v_2^2) e^{-\sqrt{s}v_2 Z} \right]. \quad (11)$$

Постійні інтегрування A_1, A_2, A_3, A_4 , після підстановки розв'язків (10), (11) в умови (6)–(9), отримуємо з системи лінійних алгебраїчних рівнянь 4-го порядку:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 K_v - A_3 - A_4 K_v = -\frac{1}{v_1 \sqrt{s}} \bar{\text{Ki}}_q(\text{Fo}), \\ A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 K_v - A_3 \alpha_1 - A_4 \alpha_2 K_v = 0, \\ A_1 (\beta_1 + v_1 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s}v_1} + A_2 (\beta_2 + v_2 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s}v_2} + A_3 (\beta_1 - v_1 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s}v_1} + A_4 (\beta_2 - v_2 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s}v_2} = \frac{C}{s}, \\ A_1 (\gamma_1 + \text{Pn} v_1 \sqrt{s} + \delta_1 v_1 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s}v_1} + A_2 (\gamma_2 + \text{Pn} v_2 \sqrt{s} + \delta_2 v_2 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s}v_2} + \\ + A_3 (\gamma_1 - \text{Pn} v_1 \sqrt{s} - \delta_1 v_1 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s}v_1} + A_4 (\gamma_2 - \text{Pn} v_2 \sqrt{s} - \delta_2 v_2 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s}v_2} = -\frac{\text{Bi}_m}{s}, \end{cases} \quad (12)$$

де $\alpha_i = 1 - \nu_i^2 + \text{Ko}^* \text{Pn}$, $\beta_i = \text{Bi}_q + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \text{LuBi}_m (1 - \nu_i^2)$, $\gamma_i = \frac{\text{Bi}_m (1 - \nu_i^2)}{\text{Ko}^*}$, $\delta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\text{Ko}^*}$,
 $\eta_i = \text{Pn} + \delta_i$, $(i=1,2)$; $K_v = \frac{\nu_2}{\nu_1}$, $C = \text{Bi}_q - (1 - \varepsilon) \text{KoLuBi}_m$; $\overline{\text{Ki}}_q(\text{Fo}) = \frac{\text{Ki}_q}{s}$, бо
 $\text{Ki}_q(\text{Fo}) = \text{Ki}_q = \text{const}$, оскільки в подальших числових обрахунках приймається
 $q = \text{const}$. Систему (12) розв'язуємо методом Крамера:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, A_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}; \quad (13)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & K_v & -1 & -K_v \\ \alpha_1 & \alpha_2 K_v & -\alpha_1 & -\alpha_2 K_v \\ (\beta_1 + \nu_1 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s} \nu_1} & (\beta_2 + \nu_2 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s} \nu_2} & (\beta_1 - \nu_1 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s} \nu_1} & (\beta_2 - \nu_2 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s} \nu_2} \\ (\gamma_1 + \eta_1 \nu_1 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s} \nu_1} & (\gamma_2 + \eta_2 \nu_2 \sqrt{s}) e^{\sqrt{s} \nu_2} & (\gamma_1 - \eta_1 \nu_1 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s} \nu_1} & (\gamma_2 - \eta_2 \nu_2 \sqrt{s}) e^{-\sqrt{s} \nu_2} \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= 4(\alpha_1 - \alpha_2) K_v \left[(\gamma_1 \text{ch} \sqrt{s} \nu_1 + \eta_1 \nu_1 \sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} \nu_1) (\beta_2 \text{ch} \sqrt{s} \nu_2 + \nu_2 \sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} \nu_2) - \right.$$

$$\left. - (\gamma_2 \text{ch} \sqrt{s} \nu_2 + \eta_2 \nu_2 \sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} \nu_2) (\beta_1 \text{ch} \sqrt{s} \nu_1 + \nu_1 \sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} \nu_1) \right] = 4(\alpha_1 - \alpha_2) K_v \psi_0(s),$$

де $\psi_0(s) = a_1(s) b_2(s) - a_2(s) b_1(s)$,

$a_i(s) = \gamma_i \text{ch} \sqrt{s} \nu_i + \eta_i \nu_i \sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} \nu_i$, $b_i(s) = \beta_i \text{ch} \sqrt{s} \nu_i + \nu_i \sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} \nu_i$, $(i=1,2)$.

Підставивши знайдені визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ у формули (13), знаходимо постійні A_1, A_2, A_3, A_4 . Після підстановки цих постійних у вирази (10), (11) остаточно отримуюємо трансформанти для температури та потенціалу вологоперенесення:

$$\bar{T}(Z, s) = \frac{\alpha_2 \text{Ki}_q}{\nu_1 (\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{\Phi_1(Z, s)}{\sqrt{s} s \psi_0(s)} - \frac{\Phi_2(Z, s)}{\sqrt{s} s \psi_0(s)} \right] - C \left[\frac{\varphi_{11}(Z, s)}{s \psi_0(s)} - \frac{\varphi_{12}(Z, s)}{s \psi_0(s)} \right] -$$

$$- \text{Bi}_m \left[\frac{\varphi_{21}(Z, s)}{s \psi_0(s)} - \frac{\varphi_{22}(Z, s)}{s \psi_0(s)} \right] = \frac{\Phi^T(s)}{\Psi(s)}, \quad (15)$$

$$\bar{\Theta}(Z, s) = -\frac{1}{\text{Ko}^*} \left\{ \frac{\alpha_2 \text{Ki}_q}{\nu_1 (\alpha_2 - \alpha_1)} \left[(1 - \nu_1^2) \frac{\Phi_1(Z, s)}{\sqrt{s} s \psi_0(s)} - (1 - \nu_2^2) \frac{\Phi_2(Z, s)}{\sqrt{s} s \psi_0(s)} \right] - \right.$$

$$- C \left[(1 - \nu_1^2) \frac{\varphi_{11}(Z, s)}{s \psi_0(s)} - (1 - \nu_2^2) \frac{\varphi_{12}(Z, s)}{s \psi_0(s)} \right] -$$

$$\left. - \text{Bi}_m \left[(1 - \nu_1^2) \frac{\varphi_{21}(Z, s)}{s \psi_0(s)} - (1 - \nu_2^2) \frac{\varphi_{22}(Z, s)}{s \psi_0(s)} \right] \right\} = \frac{\Phi^\Theta(s)}{\Psi(s)}, \quad (16)$$

$$\text{де } \Phi_1(Z, s) = b_2(s) \left[\gamma_1 sh \sqrt{s} v_1 (1-Z) + \eta_1 v_1 \sqrt{s} ch \sqrt{s} v_1 (1-Z) \right] - \\ - a_2(s) \left[\beta_1 sh \sqrt{s} v_1 (1-Z) + v_1 \sqrt{s} ch \sqrt{s} v_1 (1-Z) \right] + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\gamma_2 - \beta_2 \eta_2) v_1 \sqrt{s} ch \sqrt{s} v_1 Z,$$

$$\Phi_2(Z, s) = \frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} a_1(s) \left[\beta_2 sh \sqrt{s} v_2 (1-Z) + v_2 \sqrt{s} ch \sqrt{s} v_2 (1-Z) \right] - \\ - \frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} b_1(s) \left[\gamma_2 sh \sqrt{s} v_2 (1-Z) + \eta_2 v_2 \sqrt{s} ch \sqrt{s} v_2 (1-Z) \right] - (\gamma_1 - \beta_1 \eta_1) v_1 \sqrt{s} ch \sqrt{s} v_2 Z, \\ \varphi_{11}(Z, s) = a_2(s) ch \sqrt{s} v_1 Z, \quad \varphi_{12}(Z, s) = a_1(s) ch \sqrt{s} v_2 Z, \\ \varphi_{21}(Z, s) = b_2(s) ch \sqrt{s} v_1 Z, \quad \varphi_{22}(Z, s) = b_1(s) ch \sqrt{s} v_2 Z, \quad \Psi(s) = s \psi_0(s).$$

Необхідно відмітити, що трансформанти (15) і (16), після підстановки в граничні умови (6)–(9), повністю їх задовольняють.

Для знаходження оригіналів $T(Z, \text{Fo})$, $\Theta(Z, \text{Fo})$ трансформант $\bar{T}(Z, s)$, $\bar{\Theta}(Z, s)$ використовуємо теорему розкладу Ващенко-Захарченка [2], згідно з якою отримуємо формули обернення:

$$T(Z, \text{Fo}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \bar{T}(Z, s) e^{s\text{Fo}} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{\Phi^T(s)}{\Psi(s)} e^{s\text{Fo}} ds = \frac{\Phi^T(0)}{\Psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^T(s_n)}{\Psi'(s_n)} e^{s_n \text{Fo}}, \quad (17)$$

$$\Theta(Z, \text{Fo}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \bar{\Theta}(Z, s) e^{s\text{Fo}} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{\Phi^\Theta(s)}{\Psi(s)} e^{s\text{Fo}} ds = \frac{\Phi^\Theta(0)}{\Psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^\Theta(s_n)}{\Psi'(s_n)} e^{s_n \text{Fo}}, \quad (18)$$

де S_n — розв'язки (корені) знаменника $\Psi(s) = s \psi_0(s)$ у виразі (15), тобто розв'язки рівняння

$$s \left[(\gamma_1 ch \sqrt{s} v_1 + \eta_1 v_1 \sqrt{s} sh \sqrt{s} v_1) (\beta_2 ch \sqrt{s} v_2 + v_2 \sqrt{s} sh \sqrt{s} v_2) - \right. \\ \left. - (\gamma_2 ch \sqrt{s} v_2 + \eta_2 v_2 \sqrt{s} sh \sqrt{s} v_2) (\beta_1 ch \sqrt{s} v_1 + v_1 \sqrt{s} sh \sqrt{s} v_1) \right] = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$1) s = 0 \text{ (нульовий корінь);} \quad 2) a_1(s) b_2(s) - a_2(s) b_1(s) = 0.$$

З останнього рівняння, після заміни $chx = \cos ix$, $shx = -i \sin ix$, отримуємо

$$(\beta_2 \cos i \sqrt{s} v_2 - i \sqrt{s} v_2 \sin i \sqrt{s} v_2) (\gamma_1 \cos i \sqrt{s} v_1 - \eta_1 i \sqrt{s} v_1 \sin i \sqrt{s} v_1) - \\ - (\beta_1 \cos i \sqrt{s} v_1 - i \sqrt{s} v_1 \sin i \sqrt{s} v_1) (\gamma_2 \cos i \sqrt{s} v_2 - \eta_2 i \sqrt{s} v_2 \sin i \sqrt{s} v_2) = 0.$$

Якщо у цьому рівнянні ввести заміну $i \sqrt{s} = \mu$, то $s_n = -\mu_n^2$, а μ_n визначаємо з наступного характеристичного рівняння

$$(\beta_2 \cos v_2 \mu - v_2 \mu \sin v_2 \mu) (\gamma_1 \cos v_1 \mu - \eta_1 v_1 \mu \sin v_1 \mu) - \\ - (\beta_1 \cos v_1 \mu - v_1 \mu \sin v_1 \mu) (\gamma_2 \cos v_2 \mu - \eta_2 v_2 \mu \sin v_2 \mu) = 0. \quad (19)$$

Знайдемо оригінали $T(Z, \text{Fo})$, $\Theta(Z, \text{Fo})$, використовуючи формули обернення (17), (18). Для першого (нульового) кореня $s = 0$, згідно з (17), (18), (15) і (16), матимемо:

$$\begin{aligned}
 T_{\infty}(Z) &= \frac{\Phi^T(0)}{\Psi'(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi^T(s)}{\Psi'(s)} = \\
 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\text{Ki}_q}{D} \left\{ - \left[(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)(1-Z) + \beta_2 \eta_1 - \gamma_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\gamma_2 - \beta_2 \eta_2) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu_2}{\nu_1} \left[\frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)(1-Z) + \frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} (\gamma_1 - \beta_1 \eta_1) \right] + \beta_1 \eta_1 - \gamma_1 \right\} - \\
 &\quad - \frac{1}{D} \left\{ [\text{Bi}_q - (1-\varepsilon) \text{KoLuBi}_m] (\gamma_2 - \gamma_1) + \text{Bi}_m (\beta_2 - \beta_1) \right\} = 1 + \frac{\text{Ki}_q}{\text{Bi}_q} [1 + \text{Bi}_q (1-Z)],
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\infty}(Z) &= \frac{\Phi^{\Theta}(0)}{\Psi'(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi^{\Theta}(s)}{\Psi'(s)} = \\
 &= - \frac{1}{\text{Ko}^*} \left\langle \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\text{Ki}_q}{D} \left\{ (1-\nu_1^2) \left[(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)(1-Z) + \beta_2 \eta_1 - \gamma_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\gamma_2 - \beta_2 \eta_2) \right] - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1-\nu_2^2) \frac{\nu_2}{\nu_1} \left[\frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)(1-Z) + \frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} (\gamma_1 - \beta_1 \eta_2) \right] - (1-\nu_2^2) (\beta_1 \eta_1 - \gamma_1) \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{D} \left\{ [\text{Bi}_q - (1-\varepsilon) \text{KoLuBi}_m] [(1-\nu_1^2) \gamma_2 - (1-\nu_2^2) \gamma_1] + \text{Bi}_m [(1-\nu_1^2) \beta_2 - (1-\nu_2^2) \beta_1] \right\} \right\rangle = \\
 &\quad = 1 + \text{PnKi}_q (1-Z),
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\text{де } D = \Psi'(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = (s \psi_0(s))' \Big|_{s \rightarrow 0} = \psi_0(s) \Big|_{s \rightarrow 0} + s \psi_0'(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = \psi_0(s) \Big|_{s \rightarrow 0} =$$

$$= \beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2 = \frac{\text{Bi}_m \text{Bi}_q}{\text{Ko}^*} (\nu_2^2 - \nu_1^2).$$

Для останніх коренів знаходимо

$$\begin{aligned}
 \Psi'(s) &= (s \psi_0(s))' = \psi_0(s) + s \psi_0'(s) = \psi_0(s) + \frac{\sqrt{s}}{2} \left[((\gamma_1 + \eta_1) sh \sqrt{s} \nu_1 + \eta_1 \nu_1 \sqrt{s} ch \sqrt{s} \nu_1) \nu_1 b_2(s) + \right. \\
 &\quad + a_1(s) \nu_2 ((\beta_2 + 1) sh \sqrt{s} \nu_2 + \sqrt{s} \nu_2 ch \sqrt{s} \nu_2) - ((\gamma_2 + \eta_2) sh \sqrt{s} \nu_2 + \eta_2 \nu_2 \sqrt{s} ch \sqrt{s} \nu_2) \nu_2 b_1(s) - \\
 &\quad \left. - a_2(s) \nu_1 ((\beta_1 + 1) sh \sqrt{s} \nu_1 + \sqrt{s} \nu_1 ch \sqrt{s} \nu_1) \right] =
 \end{aligned}$$

після заміни $chx = \cos ix$, $shx = -i \sin ix$, $i\sqrt{s} = \mu \rightarrow s = -\mu^2$ отримуємо

$$\begin{aligned}
 &= \psi_0(s) + \frac{\mu}{2} \left[((\gamma_1 + \eta_1) \sin \nu_1 \mu + \eta_1 \nu_1 \mu \cos \nu_1 \mu) \nu_1 b_2(\mu) + a_1(\mu) \nu_2 ((\beta_2 + 1) \sin \nu_2 \mu + \nu_2 \mu \cos \nu_2 \mu) - \right. \\
 &\quad \left. - ((\gamma_2 + \eta_2) \sin \nu_2 \mu + \eta_2 \nu_2 \mu \cos \nu_2 \mu) \nu_2 b_1(\mu) - a_2(\mu) \nu_1 ((\beta_1 + 1) \sin \nu_1 \mu + \nu_1 \mu \cos \nu_1 \mu) \right] = \\
 &\quad = \psi_0(s) + \frac{\mu}{2} [\nu_1 (c_1(\mu) b_2(\mu) - a_2(\mu) d_1(\mu)) - \nu_2 (c_2(\mu) b_1(\mu) - a_1(\mu) d_2(\mu))].
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\Psi'(s_n) = \lim_{s \rightarrow s_n} \Psi'(s) = \psi_0(s) \Big|_{s \rightarrow s_n} + s \psi_0'(s) \Big|_{s \rightarrow s_n} = s \psi_0'(s) \Big|_{s \rightarrow s_n} =$$

$$= -\frac{\mu_n}{2} \left[v_1 (c_1(\mu_n) b_2(\mu_n) - a_2(\mu_n) d_1(\mu_n)) - v_2 (c_2(\mu_n) b_1(\mu_n) - a_1(\mu_n) d_2(\mu_n)) \right] = -\frac{D(\mu_n)}{2},$$

$$\text{де } D(\mu_n) = \mu_n \left[v_1 (c_1(\mu_n) b_2(\mu_n) - a_2(\mu_n) d_1(\mu_n)) - v_2 (c_2(\mu_n) b_1(\mu_n) - a_1(\mu_n) d_2(\mu_n)) \right],$$

$$a_i(\mu_n) = \gamma_i \cos v_i \mu_n - \eta_i v_i \mu_n \sin v_i \mu_n, \quad c_i(\mu_n) = (\gamma_i + \eta_i) \sin v_i \mu_n + \eta_i v_i \mu_n \cos v_i \mu_n,$$

$$b_i(\mu_n) = \beta_i \cos v_i \mu_n - v_i \mu_n \sin v_i \mu_n, \quad d_i(\mu_n) = (\beta_i + 1) \sin v_i \mu_n + v_i \mu_n \cos v_i \mu_n, \quad (i=1,2).$$

Застосовуючи теорему розкладу до кожного доданку формул (15) і (16), маємо:

$$\frac{\Phi_1(s, Z)}{\sqrt{s}} \Big|_{s \rightarrow s_n} = b_2(\mu_n) \left[\gamma_1 \frac{\sin v_1 \mu_n (1-Z)}{\mu_n} + \eta_1 v_1 \cos v_1 \mu_n (1-Z) \right] -$$

$$- a_2(\mu_n) \left[\beta_1 \frac{\sin v_1 \mu_n (1-Z)}{\mu_n} + v_1 \cos v_1 \mu_n (1-Z) \right] + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\gamma_2 - \beta_2 \eta_2) v_1 \cos \sqrt{s} v_1 \mu_n Z,$$

$$\frac{\Phi_2(s, Z)}{\sqrt{s}} \Big|_{s \rightarrow s_n} = \frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} a_1(\mu_n) \left[\beta_2 \frac{\sin v_2 \mu_n (1-Z)}{\mu_n} + v_2 \cos v_2 \mu_n (1-Z) \right] -$$

$$- \frac{\alpha_1}{K_v \alpha_2} b_1(\mu_n) \left[\gamma_2 \frac{\sin v_2 \mu_n (1-Z)}{\mu_n} + \eta_2 v_2 \cos v_2 \mu_n (1-Z) \right] + (\beta_1 \eta_1 - \gamma_1) v_1 \cos v_2 \mu_n Z,$$

$$\varphi_{11}(s, Z) - \varphi_{12}(s, Z) \Big|_{s \rightarrow s_n} = a_2(\mu_n) \cos v_1 \mu_n Z - a_1(\mu_n) \cos v_2 \mu_n Z,$$

$$\varphi_{21}(s, Z) - \varphi_{22}(s, Z) \Big|_{s \rightarrow s_n} = b_2(\mu_n) \cos v_1 \mu_n Z - b_1(\mu_n) \cos v_2 \mu_n Z.$$

Таким чином, розв'язок задачі (1)–(4), згідно з формулами (17), (18), (15), (16), (20) і (21), остаточно запишемо так:

$$T(Z, \text{Fo}) = 1 + \frac{\text{Ki}_q}{\text{Bi}_q} \left[1 + \text{Bi}_q (1-Z) \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left[B_i(\mu_n, Z) + C_i(\mu_n, Z) \right] \frac{\exp(-\mu_n^2 \text{Fo})}{D(\mu_n)}, \quad (22)$$

$$\Theta(Z, \text{Fo}) = 1 + \text{Pn Ki}_q (1-Z) + \frac{2}{\text{Ko}^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left[B_i(\mu_n, Z) + C_i(\mu_n, Z) \right] \frac{(1-v_i^2) \exp(-\mu_n^2 \text{Fo})}{D(\mu_n)}, \quad (23)$$

де

$$B_1(\mu_n, Z) = \frac{\text{Ki}_q}{\alpha_2 - \alpha_1} \left\{ \alpha_2 \left[(\gamma_1 b_2(\mu_n) - \beta_1 a_2(\mu_n)) \frac{\sin v_1 \mu_n (1-Z)}{v_1 \mu_n} + (\eta_1 b_2(\mu_n) - a_2(\mu_n)) \cos v_1 \mu_n (1-Z) \right] + \right.$$

$$+ \alpha_1 \left[(\gamma_2 - \beta_2 \eta_2) \cos v_1 \mu_n Z \right], \quad B_2(\mu_n, Z) = \frac{\text{Ki}_q}{\alpha_2 - \alpha_1} \left\{ \alpha_1 \left[(\gamma_2 b_1(\mu_n) - \beta_2 a_1(\mu_n)) \frac{\sin v_2 \mu_n (1-Z)}{v_2 \mu_n} + \right.$$

$$+ (\eta_2 b_1(\mu_n) - a_1(\mu_n)) \cos v_2 \mu_n (1-Z) \right] + \alpha_2 \left[(\gamma_1 - \beta_1 \eta_1) \cos v_2 \mu_n Z \right\},$$

$$C_1(\mu_n, Z) = -[Ca_2(\mu_n) + Bi_m b_2(\mu_n)] \cos \nu_1 \mu_n Z,$$

$$C_2(\mu_n, Z) = [Ca_1(\mu_n) + Bi_m b_1(\mu_n)] \cos \nu_2 \mu_n Z.$$

Зауважимо, що при $Fo \rightarrow \infty$ із формул (22), (23) отримуємо стаціонарні (усталені) значення:

$$T_\infty(Z) = 1 + \frac{Ki_q}{Bi_q} [1 + Bi_q(1-Z)], \quad \Theta_\infty(Z) = 1 + Pn Ki_q(1-Z), \quad (24)$$

які можна отримати незалежно, як розв'язок відповідної стаціонарної задачі.

Для обрахунків формули (22) та (23) представимо у розмірному вигляді:

$$t(z, \tau) = t_c + (t_c - t_0) \frac{Ki_q}{Bi_q} \left[1 + Bi_q \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right] -$$

$$- 2(t_c - t_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left[Bi_i \left(\mu_n, \frac{z}{h} \right) + C_i \left(\mu_n, \frac{z}{h} \right) \right] \frac{\exp \left(-\mu_n^2 \frac{a_q \tau}{h^2} \right)}{D(\mu_n)}, \quad (25)$$

$$\theta(z, \tau) = \theta_p - (\theta_0 - \theta_p) Pn Ki_q \left(1 - \frac{z}{h} \right) -$$

$$- (\theta_0 - \theta_p) \frac{2}{Ko^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left[Bi_i \left(\mu_n, \frac{z}{h} \right) + C_i \left(\mu_n, \frac{z}{h} \right) \right] \frac{(1 - \nu_i^2) \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a_q \tau}{h^2} \right)}{D(\mu_n)}, \quad (26)$$

де $t(z, \tau)$, $\theta(z, \tau)$ — розмірні температура та потенціал вологоперенесення, z — розмірна координата, τ — розмірний час.

Чисельний експеримент. Цей експеримент поведінки температури і потенціалу вологоперенесення в різних точках пластини залежно від часу виконано на основі отриманих аналітичних залежностей, які визначаються виразами виду (25) і (26), за допомогою засобів алгоритмічної мови Fortran. Як досліджуваний матеріал обрано картон різної товщини — 5 мм, 1 мм. При виконанні розрахунків приймали наступні розмірні параметри: $\delta = 0,01 - 0,14 \cdot 10^{-2} \text{ I}^\circ\text{C}$, $\beta = 5 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, $\lambda_q = 0,08 - 0,39 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $c = 1,51 \text{ кДж/(кг}^\circ\text{C)}$, $a = 0,6 - 1,75 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\alpha_q = 11,7 \text{ Вт/(м}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$, $a_m = 0,056 - 0,9 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $t_0 = 10^\circ\text{C}$, $t_c = 30^\circ\text{C}$, $u_0 = 0,4 \text{ кг/кг}$ ($\theta_0 = 181^\circ\text{B}$), $u_p = 0,15 \text{ кг/кг}$ ($\theta_p = 68^\circ\text{B}$), $q = 1000 \text{ Вт/м}^2$, $h = 10 \text{ мм}$; 5 мм; 1 мм, $r = 2256 \text{ кДж/кг}$, яким відповідають такі безрозмірні параметри: 1) для товщини 5 мм: $Bi_q = 0,585$; $Bi_m = 0,95$; $Ki_q = 1,79$; 2) для товщини 1 мм: $Bi_q = 0,117$; $Bi_m = 0,19$; $Ki_q = 0,358$. Параметри $\varepsilon = 0,35$; $Lu = 0,15$; $Ko = 18$; $Pn = 0,112$ однакові для двох товщин [19]. Розв'язки характеристичного рівняння (19) (перші 20 коренів μ_n), при відповідних безрозмірних параметрах, наведено в табл. 1. Параметри обраного для дослідження картону товщиною 1 мм відповідають загальним технічним умовам галузевих стандартів до палітурного картону та картону для споживчої тари, а картону товщиною 5 мм — загальним технічним умовам галузевих стандартів до заготовок для виготовлення гофрованого картону [32, 33, 34].

Таблиця 1

Корені μ_n характеристичного рівняння (19), що відповідають членам рядів у представленнях температури (25) і потенціалу вологоперенесення (26), для картону різної товщини

№ п/п	1 мм	5 мм	№ п/п	1 мм	5 мм
μ_1	0,354958	0,609192	μ_{11}	9,39447	9,39534
μ_2	0,643056	0,777025	μ_{12}	10,0306	10,0832
μ_3	1,87966	1,87974	μ_{13}	10,6713	10,6721
μ_4	3,10599	3,11693	μ_{14}	11,9126	11,9126
μ_5	3,40563	3,54601	μ_{15}	13,1334	13,1382
μ_6	4,39463	4,39507	μ_{16}	13,3977	13,4337
μ_7	5,63842	5,63872	μ_{17}	14,4274	14,4275
μ_8	6,66687	6,73387	μ_{18}	15,6712	15,6714
μ_9	6,93221	6,94539	μ_{19}	16,6747	16,7036
μ_{10}	8,15329	8,15331	μ_{20}	16,9619	16,9657

На графіках рис. 2 відображено весь перехідний (нестационарний) процес кондуктивного висушування картонних пластин різної товщини аж до стаціонарного стану для трьох поверхонь пластини: $Z = 0$ ($z = 0$) — нижня поверхня, $Z = 0,5$ ($z = h/2$) — серединна поверхня, $Z = 1$ ($z = h$) — верхня поверхня. Температура нижньої поверхні пластини, порівняно із верхньою, з самого початку процесу сушіння швидко зростає. Градієнти температури і потенціалу вологоперенесення збільшуються зі збільшенням товщини висушуваного картону. Процес висушування для 1-мм і 5-мм картону завершується приблизно через 5 хв і 1,6 год відповідно. Для картону товщиною $h = 10$ мм температурні та вологісні градієнти ще більші і час висушування становить приблизно 5 год [27]. Отримані залежності для температури та потенціалу вологоперенесення для кондуктивного сушіння картону товщиною 1 мм узгоджуються з експериментальними даними за динамікою сушіння для целюлози [1, 11], кінетикою сушіння для шкіри [11] та для тканин [4].

Під час висушування капілярно-пористих колоїдних матеріалів (картон, папір, целюлоза, дерево та ін.) можна ідентифікувати два типи напружень: напруження, спричинені вологісним всиханням та напруження, спричинені температурним розширенням. Перші розвиваються внаслідок нерівномірного висихання матеріалу. Другі напруження, спричинені тепловим розширенням, є наслідком існування градієнта температури під час перенесення тепла і залежать від швидкості сушіння [35]. Основною причиною утворення тріщин у матеріалі (тобто основною причиною виникнення великих напружень і деформацій) у процесі сушіння є наявність у ньому полів температури та вологовмісту (потенціалів тепловологоперенесення) зі значним перепадом (градієнтом) цих величин [1].

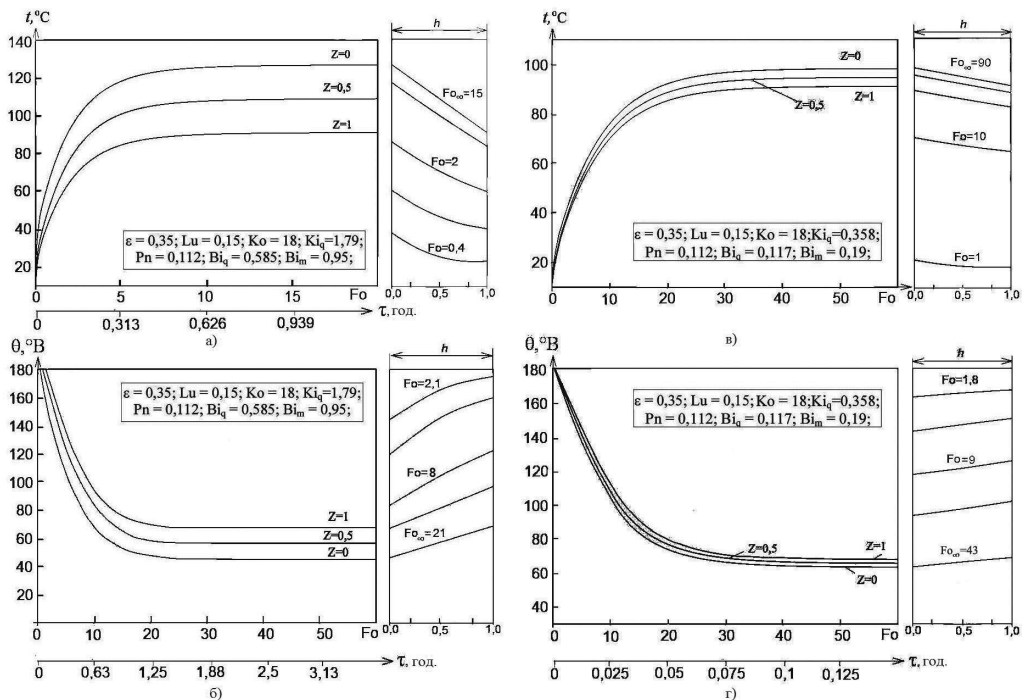


Рис. 2. Розподіли температури t і потенціалу вологоперенесення θ в часі при кондуктивному сушінні картонних пластин товщиною: а), б) $h = 5$ мм; в), г) $h = 1$ мм

У теорії нагрівання розглядається нагрівання тонких та масивних тіл. У тонких тілах перепад (градієнт) температур у перерізі матеріалу такий невеликий, що ним можна знехтувати. Під час нагрівання масивних тіл перепад (градієнт) температур досягає значних величин, які можуть викликати відповідні напруження та деформації, що необхідно враховувати в практичних розрахунках. Для встановлення межі між тонкими та масивними тілами використовується критерій Біо ($Bi_q = \alpha_q h / \lambda_q$), який вводиться в математичну модель шляхом обезрозмірення задачі і характеризує міру масивності тіла. Поділ тіл на тонкі та масивні є умовним, оскільки визначається не тільки геометричними розмірами (h), а й теплофізичними властивостями матеріалу (λ_q , α_q) і швидкістю їхнього нагрівання. Одне і те ж тіло за різних умов нагрівання може бути віднесене як до тонких, так і до масивних. Наприклад, тіло, що має велику товщину, за повільного нагрівання має незначні перепади температури у перерізі та може розглядатися як тонке, і навпаки. Тіла, за рекомендацією (ефектом) Іванцова Г. П., прийнято називати тонкими, якщо $Bi < 0,25$ та масивними, якщо $Bi > 0,5$. Інтервал значень $Bi = 0,25 \dots 0,50$ являє собою перехідну область, яку під час точних розрахунків слід віднести до масивних тіл, а під час наближених — до тонких [36]. Як видно із графіків на рис. 2, рекомендація Іванцова Г. П. прийнятна і для картону — температурні градієнти при $Bi < 0,25$ (див. рис. 2в схема справа, $Bi_q = 0,117$, $h = 1$ мм) незначні (менше 10°C), тобто пла-

стина веде себе як тонке тіло, а при $Bi > 0,5$ (див. рис. 2а схема справа, $Bi_q = 0,585$, $h = 5$ мм) — суттєві (більше $40\text{ }^{\circ}\text{C}$), тобто пластина веде себе як масивне тіло, що може викликати небажані напруження та деформації. Знаючи допустимі градієнти температури і потенціалу вологоперенесення, можна підібрати оптимальний температурний режим, що уможливить скорочення тривалості сушіння. Крім того, змінюючи ці градієнти і керуючи, таким чином, механізмом перенесення тепла і вологи, можна впливати на фізико-хімічні та біохімічні властивості матеріалу і покращувати його якість [1].

Висновки. 1. Проведені дослідження дали змогу уточнити розмірні і відповідні їм безрозмірні термодинамічні параметри для картону, що уможливило точніше моделювати процес кондуктивного сушіння певних типів поліграфічних матеріалів.

2. Запропонований підхід дає можливість досліджувати процеси сушіння у будь-яких вологих капілярно-пористих колоїдних матеріалах як для поліграфічної галузі (картон, папір, целюлоза, палітурні матеріали, нитки і т. д.), так і для інших галузей (деревина, шкіра, тканини, зерно, борошно, сухофрукти, глина, торф, вугілля, ґрунти і т.д.), будувати графіки розподілів температури і потенціалу вологоперенесення в часі та формувати відповідні рекомендації.

3. У процесі сушіння основною причиною утворення дефектів у матеріалі (наприклад, жолоблення, утворення тріщин) є наявність у ньому полів температури та вологовмісту зі значним перепадом (градієнтом) цих величин. Ці градієнти викликають відповідні напруження і деформації, при перевищенні граничного (допустимого) рівня яких і виникають дефекти в матеріалі. Встановивши ці допустимі значення градієнтів (а отже допустимі значення напружень і деформацій), можна рекомендувати інженеру-технологу ту максимальну температуру (як швидко і до якої величини підвищувати температуру) і термін часу, згідно з якими проводити сушіння. Фактично, в статті показано суть технології вдосконалення процесів сушіння матеріалів на основі математичного моделювання тепломасоперенесення у капілярно-пористих колоїдних тілах, яка уможливлює оптимальний вибір режиму сушіння, енергозбереження та забезпечення необхідної якості продукції [19].

4. Велика кількість матеріалів, що використовуються у поліграфії, є кількешаровими тілами, тобто композитами. Багато з них піддаються тепловій обробці (нагріванню, сушінню) на різних етапах виробництва. Наприклад, процеси: виготовлення деяких видів паперу, картону, сучасних пакувальних матеріалів, палітурних кришок, обкладинок, друкарських форм; ламінування і лакування відбитків; сушіння корінців книжкових блоків при вставленні цих блоків в обкладинку та ін. [12, 13, 17, 18]. Оптимізація цих процесів є актуальною проблемою для поліграфічної галузі. Тому розв'язання відповідних математичних задач за допомогою запропонованого підходу буде корисним для вивчення поведінки розподілів температури та вологовмісту в таких багат шарових структурах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. — М. : Энергия, 1968. — 472 с.
2. Лыков А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов — М. : Госэнергоиздат, 1963. — С. 535.
3. Ольшанский А. И. Исследование процесса конвективной сушки тонких и толстых влажных материалов / А. И. Ольшанский, В. И. Ольшанский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. — 2012. — Т. 4. — С. 78–88.
4. Ольшанский А. И. Исследование процесса конвективно-радиационной сушки технических тканей методом регуляторного режима / А. И. Ольшанский, С. В. Жерносек // Инженерно-физический журнал. — 2014. — Т. 87, № 5. — С. 1113–1122.
5. Озарків І. М. Термодинамічні характеристики деревини у процесі сушіння / І. М. Озарків, М. С. Кобринович // Науковий вісник : зб. наук.-техн. праць. — Львів : УкрДЛТУ, 2013. — № 13 (1). — С. 106–112.
6. Озарків І. М. Діагностика властивостей деревини в технологічних процесах деревообробки / І. М. Озарків, Є. В. Басалига, Я. Ф. Кулешник, І. А. Соколовський, М. С. Кобринович. — Львів : Вид. дім «Панорама», 2003. — С. 228.
7. Pakowski Z. Simulation of the process of convective drying: Identification of generic computation routines and their implementation in computer code dryPAK / Z. Pakowski. — Comput. Chem. — 1999. — № 23(1). — S.719–722.
8. Kowalski S. J. Thermomechanics of drying processes / S. J. Kowalski. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. — P. 365.
9. Kowalski S. J. Qualitative aspects of convective and microwave drying of saturated porous materials / S. J. Kowalski, A. Rybicki // Drying Technology. — 2004. — № 22 (5). — P. 1173–1189.
10. Rai K. N. Heat And Mass Transfer In Porous Bodies Of Simple Geometry / K. N. Rai, R. N Pandey // Indian J. Pure Appl. Math. — 1982. — № 13 (1). — P. 96–109.
11. Красников В. В. Кондуктивная сушка / В. В. Красников. — М. : Энергия, 1973. — С. 288.
12. Воробьев Д. В. Технология послепечатных процессов / Д. В. Воробьев. — М. : МГУП, 2000. — С. 392.
13. Гавенко С. Ф. Технологія мікрохвильового висушування книжкових блоків / С. Ф. Гавенко, Г. М. Йордан. — Львів : УАД, 2012. — С. 144.
14. Гавенко С. Ф. Технологія ламінування друкарських відбитків / С. Ф. Гавенко, М. С. Мартинюк. — Львів : УАД, 2008. — С. 79.
15. Коптюх Л. А. Технологічні умови виготовлення паперових пакувальних матеріалів із заданими властивостями / Л. А. Коптюх, В. А. Осика, В. В. Плосконос // Упаковка. — 2009. — № 2. — С. 22–26.
16. Коптюх Л. А. Формування властивостей паперу для друку : моногр. / Л. А. Коптюх, Т. Г. Глушкова. — К. : Київ. нац. торг.-економ. ун-т, 2011. — С. 336.
17. Шот Р. І. Теплові процеси в поліграфії : навч. посіб. / Р. І. Шот, І. Т. Стрепко. — Львів : УАД «Фенікс», 1998. — С. 202.
18. Загаринская Л. А. Полиграфические материалы : учеб. / Л. А. Загаринская, Б. Н. Шахельдян. — М. : Книга, 1975. — С. 351.

19. Сасс Т. С. Інформаційні технології удосконалення процесів сушіння поліграфічних матеріалів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.13.06 «Інформаційні технології» / Сасс Тарас Стефанович. — Львів, 2015. — 24 с.
20. Hoshi Y. Prediction of temperature and moisture content profiles of paper in drying process / Y. Hoshi et al., Trans. Jpn. Soc. Eng. — 1998. — № 64 (625). — P. 3037–3044.
21. Karlsson M. Paper Making. Part 2 / M. Karlsson. — Drying, Fapet Oy, Finland. — 2000. — P. 496.
22. Kawamizu Tsutomu Study on condensation heat transfer characteristics of wet paper in steam heating process / Tsutomu Kawamizu, Takeshi Kaneko, Setsuo Suzuki, Takaharu Tsuruta. — 2009. — № 52 (3–4). — P. 805–813.
23. Pettersson M. Absorption of infrared radiation and the radiation transfer mechanism in paper. Part I: Theoretical model / M. Pettersson, S. Stenstrom // Journal of Pulp and Paper Science. — 1998. — № 24 (11). — P. 349–355.
24. Reardon S. A. Friction, heat and mass transfer for paper drying / S. A. Reardon, M. R. Davis, P. E. Doe // International Journal Of Heat And Mass Transfer. — 1998. — № 41(10). — P. 1313–1325.
25. Coquard R. Experimental investigations of the coupled conductive and radiative heat transfer in metallic/ceramic foams // R. Coquard, D. Rochais, D. Baillis // International Journal Of Heat And Mass Transfer. — 2009. — № 52 (21–22). — P. 4907–4918.
26. Mhimid A. Heat and mass transfer during drying of granular products — simulation with convective and conductive boundary conditions / A. Mhimid, S. Ben Nasrallah, J. P. Fohr // International Journal Of Heat And Mass Transfer. — 2000. — № 43 (15). — P. 2779–2791.
27. Сасс Т. С. Порівняльний аналіз перехідних потенціалів тепловологопереносу в процесі конвективного сушіння картону різної товщини / Т. С. Сасс // Комп'ютерні технології друкарства. — 2014. — № 30. — С. 191–200.
28. Коляно Я. Ю. Порівняльний аналіз поведінки перехідних потенціалів тепловологопереносу в процесі конвективного сушіння дерева і картону / Я. Ю. Коляно, Т. С. Сасс // Технологічні комплекси. — 2014. — №1 (9). — С. 140–144.
29. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — С. 280.
30. Bruin S. Calculation of temperature and moisture distributions during contact drying of a sheet of moist material / S. Bruin // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1969. — № 12. — P. 45–49.
31. Mikhailov M. D. Temperature and moisture distributions during contact drying of a moist porous sheet / M. Mikhailov, B. K. Shishedjiev // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1975. — № 18. — P. 15–24.
32. ГОСТ 7933–89. Картон для потребительской тары. Общие технические условия [Електронний ресурс]. — Режим доступа : <http://vsegost.com/Catalog/11/11317.shtml>.
33. ГОСТ 7950–77. Картон переплетный. Технические условия [Електронний ресурс]. — Режим доступа : <http://vsegost.com/Catalog/40/40602.shtml>.
34. ГОСТ 7376–89. Картон гофрированный. Общие технические условия [Електронний ресурс]. — Режим доступа : <http://vsegost.com/Catalog/74/7439.shtml>
35. Бакалець А. В. Математичне моделювання неізотермічного вологоперенесення і в'язкопружного стану в деревині у процесі сушіння : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня

канд. техн. наук : спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Бакалець Антон Васильович. — Львів, 2010. — 20 с.

36. Ткаченко О. О. Високотемпературні процеси та установки : підруч. / О. О. Ткаченко. — К. : А.С.К., 2005. — С. 480.

REFERENCES

1. Lykov, A. (1968). *Teoriya sushki*. Moscow: Energija (in Russian).
2. Lykov, A. & Mihajlov, J. (1963). *Teoriya teplo- i massoperenosa*. Moscow: Gosjenergoizdat (in Russian).
3. Ol'shanskij, A. & Ol'shanskij, V. (2012). Issledovanie processa konvektivnoj sushki tonkih i tolstyh vlazhnyh materialov. *Vesci NAN Belarusi. Ser. Fiz.-Tjehn. Navuk*, 4, 78–88 (in Russian).
4. Ol'shanskij, A. & Zhernosek, S. (2014). Issledovanie processa konvektivno-radiacionnoj sushki tehniceskikh tkanej metodom reguljatornogo rezhima. *Inzhenerno-Fizicheskij Zhurnal*, 87 (5), 1113–1122 (in Russian).
5. Ozarkiv, I. & Kobrynovyč, M. (2013). Termodynamichni kharakterystyky derevyny u protsesi sushynnya. *Naukovyy Visnyk : Zb. Nauk.-Tekhn. Prats'*, 13.1, 106–112 (in Ukrainian).
6. Ozarkiv, I., Basalyha, Y., Kuleshnyk, Y., & Sokolovs'kyi, I. (2003). *Diahnostyka vlastyvostry derevyny v tekhnolohichnykh protsesakh derevoobrobky*. Lviv: Vyd. dim «Panorama» (in Ukrainian).
7. Pakowski, Z. (1999). Simulation of the process of convective drying: Identification of generic computation routines and their implementation in a computer code dryPAK. *Computers & Chemical Engineering*, 23, 719–722 (in English).
8. Kowalski, S. (2003). *Thermomechanics of drying processes*. Berlin: Springer (in English).
9. Kowalski, S. & Rybicki, A. (2004). Qualitative Aspects of Convective and Microwave Drying of Saturated Porous Materials. *Drying Technology*, 22(5), 1173–1189 (in English).
10. Rai, K. & Pandey, R. (1982). Heat And Mass Transfer In Porous Bodies Of Simple Geometry. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 13 (1), 96–109 (in English).
11. Krasnikov, V. (1973). *Konduktivnaja sushka*. Moscow: Jenergija (in Russian).
12. Vorob'ev, D. (2000). *Tehnologija poslepechatnyh processov*. Moscow: MGUP (in Russian).
13. Havenko, S. & Yordan, H. (2012). *Tekhnolohiya mikrokhvyl'ovoho vysushuvannya knyzhkovykh blokiv*. Lviv: UAD (in Ukrainian).
14. Havenko, S. & Martynyuk, M. (2008). *Tekhnolohiya laminuvannya drukars'kykh vidbytkiv*. Lviv: UAD (in Ukrainian).
15. Koptyukh, L., Osyka, V., & Ploskonos, V. (2009). *Tekhnolohichni umovy vyhotovlennya paperyovykh pakoval'nykh materialiv iz zadanymy vlastyvostryamy*. *Upakovka*, 2, 22–26 (in Ukrainian).
16. Koptyukh, L. & Hlushkova, T. (2011). *Formuvannya vlastyvostry papery dlya druku*. Kyiv: Kyiv. nats. torh.-ekonom. un-t (in Ukrainian).
17. Shot, R. & Strečko, I. (1998). *Teplovi protsesy v polihrafiyi : navch. pos.*. Lviv: UAD «Feniks» (in Ukrainian).
18. Zagarinskaja, L. & Shakhel'djan, B. (1975). *Poligraficheskie materialy*. Moscow: Kniga (in Russian).

19. Sass, T. (2015). Informatsiyni tekhnolohiyi udoskonalennya protsesiv sushynnya polihrafichnykh materialiv (Ph.D., Engineering Science). Ukrainian Academy of Printing (in Ukrainian).
20. Hoshi, Y., Kuno, H., Takeshita, K., Hashimoto, R., Yanagi, K., & Yoshida, S. (1998). Prediction of temperature and moisture content profiles of paper in drying process. *Transactions Of The Japan Society Of Mechanical Engineers Series B*, 64(625), 3037–3044 (in English).
21. Karlsson, M. (2000). *Papermaking Part 2: Drying*. Finland: Fapet Oy (in English).
22. Kawamizu, T., Kaneko, T., Suzuki, S., & Tsuruta, T. (2009). Study on condensation heat transfer characteristics of wet paper in steam heating process. *International Journal Of Heat And Mass Transfer*, 52(3–4), 805–813 (in English).
23. Pettersson, M. & Stenström, S. (1998). Absorption of infrared radiation and the radiation transfer mechanism in paper. Part I: Theoretical model. *Journal Of Pulp And Paper Science*, 24(11), 349–355 (in English).
24. Reardon, S., Davis, M., & Doe, P. (1998). Friction, heat and mass transfer for paper drying. *International Journal Of Heat And Mass Transfer*, 41(10), 1313–1325 (in English).
25. Coquard, R., Rochais, D., & Baillis, D. (2009). Experimental investigations of the coupled conductive and radiative heat transfer in metallic/ceramic foams. *International Journal Of Heat And Mass Transfer*, 52 (21–22), 4907–4918.
26. Mhimid, A., Ben Nasrallah, S., & Fohr, J. (2000). Heat and mass transfer during drying of granular products — simulation with convective and conductive boundary conditions. *International Journal Of Heat And Mass Transfer*, 43 (15), 2779–2791 (in English).
27. Sass, T. (2014). Porivnyal'nyy analiz perekhidnykh potentsialiv teplovolohoperenosu v protsesi konvektyvnoho sushynnya kartonu riznoyi tovshchyny. *Komp'yuterni Tekhnolohiyi Drukstva: Zb. Nauk. Prats'*, 30, 191–200 (in Ukrainian).
28. Kolyano, Ya. & Sass, T. (2014). Porivnyal'nyy analiz povedinky perekhidnykh potentsialiv teplovolohoperenosu v protsesi konvektyvnoho sushynnya dereva i kartonu. *Naukovyy Zhurnal "Tekhnolohichni Kompleksy"*, 1(9), 140–144 (in Ukrainian).
29. Kolyano, Yu. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Nauk. dumka (in Russian).
30. Bruin, S. (1969). Calculation of temperature and moisture distributions during contact drying of a sheet of moist material. *International Journal Of Heat And Mass Transfer*, 12(1), 45–59 (in English).
31. Mikhailov, M. & Shishedjiev, B. (1975). Temperature and moisture distributions during contact drying of a moist porous sheet. *International Journal Of Heat And Mass Transfer*, 18(1), 15–24 (in English).
32. GOST 7933–89. Karton dlja potrebitel'skoj tary. Obshhie tehniccheskie uslovija. (1989). Retrieved from <http://vsegost.com/Catalog/11/11317.shtml> (in Russian).
33. GOST 7950–77. Karton perepletnyj. Tehniccheskie uslovija. (1977). Retrieved from <http://vsegost.com/Catalog/40/40602.shtml> (in Russian).
34. GOST 7376–89. Karton gofrirovannyj. Obshhie tehniccheskie uslovija. (1989). Retrieved from <http://vsegost.com/Catalog/74/7439.shtml> (in Russian).
35. Bakalets', A. (2010). Matematychni modelyuvannya neizotermichnoho volohoperenesennya i v'yzkopruzhnogo stanu v derevyni u protsesi sushynnya (Ph.D.). Lviv Polytechnic (in Ukrainian).

36. Tkachenko, O. (2005). Vysokotemperaturni protsesy ta ustanovky. Kyiv: A.S.K. (in Ukrainian).

RESEARCH OF BEHAVIOUR OF TRANSITION FIELDS OF TEMPERATURE AND MOISTURE TRANSFER POTENTIAL DURING CONDUCTIVE DRYING OF CARDBOARD

Ya. Yu. Kolyano, T. S. Sass

*Ukrainian Academy of Printing
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
orange3005@gmail.com*

The approach to the study of the processes of heating and drying certain types of printing materials, based on the theory of non-stationary thermal conductivity, developed by school of academician A.V. Lykov is suggested. Approbation performed to conductive (contact) drying of cardboard plate. The results of numerous investigations can be applied in practice in the studying of heat and moisture transfer processes in capillary-porous colloidal materials, resulting in a possible optimization of technological modes of drying and to ensure the necessary quality indicators printed products.

Keywords: *conductive and convective drying, non-stationary heat and moisture conductivity, mathematical model, initial boundary task, Laplace transform of integrals, gradients of potentials of temperature and moisture transfer, thermodynamic parameters, cardboard, capillary-porous colloidal materials, printing industry.*

Стаття надійшла до редакції 19.05.2016.

Received 19.05.2016.