

АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІВ В ЯРУСНО-ПАРАЛЕЛЬНУ ФОРМУ НА ОСНОВІ ОПЕРАЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Роман Дунець, Богдан Дунець

При побудові систем керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу, зокрема в поліграфії, можуть одночасно застосовуватися два підходи. Перший підхід полягає в розпаралелюванні алгоритму [1], а другий — в застосуванні спеціалізованих багатофункціональних процесорів обробки даних [2]. В обох випадках алгоритм роботи системи керування потрібно перетворювати в ярусно-паралельну форму, так як вона найбільш повно дозволяє виявити всі форми паралелізму, а також приймати оптимальне рішення при побудові апаратури [3].

Граф в ярусно-паралельній формі — це граф, у якого всі вершини розділені на яруси, причому так, що між вершинами в межах одного ярусу не може бути ніяких зв'язків.

В роботі [4] показано, що для машинних методів представлення графів найкраще використовувати матриці суміжності, а для їх опрацювання застосовувати операції алгебри логіки. В цій же роботі запропоновано алгоритм поділу графа на яруси з метою визначення послідовності моделювання компонентів, проте він не дозволяє отримати граф безпосередньо в ярусно-паралельній формі тому, що в результаті поділу в межах одного ярусу можуть бути вершини, які мають зв'язки між собою.

Передбачається, що спочатку для наглядності алгоритм задається у вигляді орієнтованого графу, де кожній вершині графу приписується порядковий номер. Далі складається матриця суміжності з'єднань по виходах, яка в загальному випадку має наступний вигляд:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Елементи матриці суміжності (1) можуть приймати значення 0 або 1. Значення 1 відповідає наявності зв'язку, а значення 0 – відсутності зв'язку. Якщо елемент матриці $a_{ij}=1$, то це означає, що вихід вершини графа з позиційним номером i з'єднаний із входом вершини графа з позиційним номером j . Якщо $a_{ij}=0$, то з'єднання між даними вершинами графа немає.

Для поділу графа на яруси зручно застосовувати операції алгебри логіки над матрицями суміжностей, оскільки їх елементи приймають тільки значення 0 або 1. Такими операціями будуть:

1. *Логічне множення матриць.* Якщо є матриця $A=[a_{ij}]_{n \times p}$, $a_{ij} \in \{0,1\}$ і матриця $B=[b_{ij}]_{n \times m}$, $b_{ij} \in \{0,1\}$, то в результаті логічного множення утвориться матриця $\bar{F}=\bar{A} \otimes \bar{B}$, кожен елемент якої f_{ij} визначиться як

$$f_{ij} = a_{i1} \& b_{1j} \vee a_{i2} \& b_{2j} \vee \dots \vee a_{ip} \& b_{pj} = \bigvee_{s=1}^p a_{is} \& b_{sj}. \quad (2)$$

2. *Кон'юнкція матриць.* Якщо є матриця $A=[a_{ij}]_{m \times n}$, $a_{ij} \in \{0,1\}$ і матриця $B=[b_{ij}]_{m \times n}$, $b_{ij} \in \{0,1\}$, то в результаті кон'юнкції утвориться матриця $F = A \& B$, в якій кожен елемент буде $f_{ij} = a_{ij} \& b_{ij}$.

3. *Інверсія матриці.* Якщо є матриця $A=[a_{ij}]_{m \times n}$, то її інверсією буде матриця $\bar{A}$, кожен елемент якої є $\bar{a}_{ij}$.

Приведемо наступні теореми, які лежать в основі алгоритму перетворення графа в ярусно-паралельну форму.

Теорема 1. Якщо існує матриця з'єднань компонентів по виходах $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ і матриця $B=[b_{ij}]_n$, нульові елементи якої відповідають вершинам графу k -го ярусу, то в результаті логічного множення цих матриць утворюється матриця $F = B \otimes A$, нульові елементи якої відповідають тільки вершинам графу k -го і $k+1$ -го ярусів.

Доведення. Довільний елемент f_{ij} матриці F прийме нульове значення тоді і тільки тоді, коли в процесі логічного множення (2) всі кон'юнкції $b_{j-2} \& a_{ij}$ ($i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$) приймуть нульове значення. Нехай елемент $b_{j-2}=0$, а всі інші елементи матриці B будуть рівні одиниці, тобто всі вершини графу за винятком вершини з номером $j-2$ не будуть належати до k -ого ярусу. В цьому випадку елемент f_{ij} прийме нульове значення тоді, коли всі елементи a_{ij} будуть мати нульові значення, крім елементу a_{ij-2} , який може мати довільне значення. Це означає, що вершина i графа, своїм виходом не з'єднана із входом інших вершин, крім

вершини з номером $j-2$, якщо елемент $a_{j-2}=1$. Таким чином, в матриці F її нульові елементи відповідають тільки вершинам графу k -го і $k+1$ -го ярусів. Теорема доведена.

Теорема 2. Якщо існує матриця $F=[f]_n$, нульові елементи якої відповідають вершинам графу k -го і $k+1$ -го ярусів, і якщо існує матриця $B=[b]_n$, одиничні елементи якої відповідають вершинам графу k -го ярусу, то в матриці $C = \overline{F} \& B$ одиничні елементи відповідають тільки компонентам схеми $k+1$ -го ярусу.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1.

Алгоритм перетворення графів в ярусно-паралельну форму передбачає циклічне виконання k кроків ($k=1,2,3,\dots$). Спочатку перетворення приймається, що жоден із вершин графу не входить в перший ярус, тобто всі елементи матриці-стовпця B_0 є одиничними. Далі виконується операція $B_i \leftarrow B_i \otimes A$ пошуку множини вершин графу, які входять в k та $k-1$ -й ярус. Далі з допомогою операції $C_k = \overline{B}_k \otimes B_{k-1}$ визначається множина вершин графу, які входять в k -й ярус. Вказані операції повторюються до тих пір, поки на черговому кроці не виявиться, що утворена матриця B_k є нульовою.

Проілюструємо роботу алгоритму для графа, приведенного на рис.1.

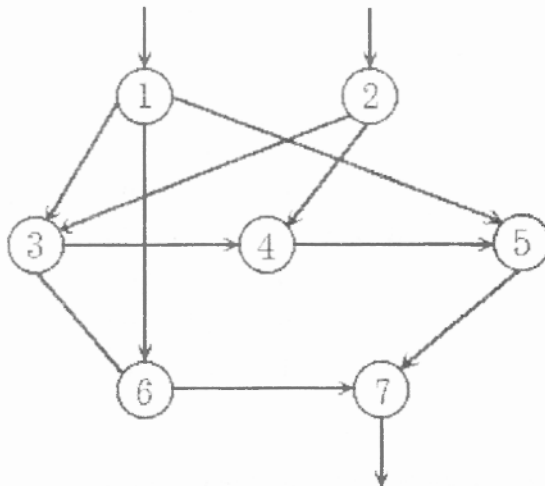


Рис.1 Початковий граф

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

$k=1$

$$B_1 = B_n \otimes A = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \overline{B_1} \& B_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \& \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

В 1-й ярус входит 7-ма вершина графа. $B_1 \neq 0$.

$k=2$

$$B_2 = B_1 \otimes A = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$C_2 = \overline{B_2} \& B_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \& \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В 2-й ярус входят 5-а і 6-а вершини графа. $B_2 \neq 0$.

$k=3$

$$B_3 = B_2 \otimes A = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$C_3 = \overline{B_3} \& B_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \& \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

В 3-й ярус входит 4-я вершина графа. $B_3 \neq 0$.

$k=4$

$$B_4 = B_3 \otimes A = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$C_4 = \overline{B_4} \& B_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \& \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В 4-й ярус входит 3-я вершина графа. $B_4 \neq 0$.

$k=5$

$$B_5 = B_4 \otimes A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$C_5 = \overline{B_5} \& B_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \& \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В 5-й ярус входять 1-а і 2-а вершини графа. $B_5 = 0$ — кінець.

Отриманий граф в ярусно-паралельній формі приведений на рис.2.

Оскільки даний алгоритм використовує операції алгебри логіки над матрицями, то він просто реалізується на комп'ютерах. Для закодування даного алгоритму можна скористатися однією з мов високого рівня, наприклад, Pascal, Сі. Зокрема даний алгоритм при використанні мови Pascal оформлений в виді TPU-файла може застосовуватися в складі програмного забезпечення САІР спеціалізованих пристроїв керування.

Література

1. Поспелов Д.А. Введение в теорию вычислительных систем. - М.: Сов. радио, 1972. - 280 с.
2. Функционально ориентированные процессоры. А.И. Вадыхо, В.Б. Смолов, В.У. Плюсин, Д.В. Пузанков / Под ред. В.Б. Смолова. -

Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1988. - 224 с.

3. Мельник А.А. Процессоры обработки сигналов /Препринт 29-89. Ин-т прикл. проблем механики и математики. - Львов, 1989. - 63 с.

4. Дунець Р.Б. Визначення послідовності моделювання аналогових елементів в системах автоматичного керування. - В кн. Інформаційні технології та розпізнавання образів: Збірник наукових праць. том III, частина 2. - Львів-Харків-Тернопіль, 1993. 111-116с.

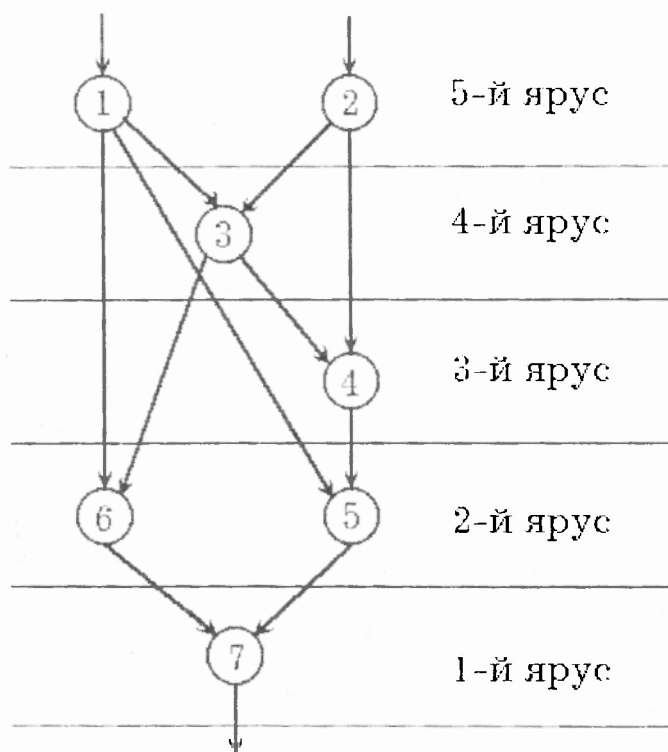


Рис. 2 Граф в ярусно-паралельній формі