

ПАРАМЕТРИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИКОНАВЧОГО КУЛАЧКОВОГО МЕХАНІЗМУ З РОЗВАНТАЖУВАЛЬНИМ ПРИСТРОЄМ

(за слабо вираженої нелінійності відновлюючого моменту)

Виконавчий кулачковий механізм (ВКМ) з розвантажувальним пристроєм (РП), що зображений на рис. 1, запропоновано К. В. Тіром, О. М. Полюдовим, А. І. Петруком і автором цієї статті. Його можна використовувати в поліграфічному і загальному машинобудуванні для локалізації надлишкових крутних моментів від сил інерції при коливальному реверсивному русі веденої маси.

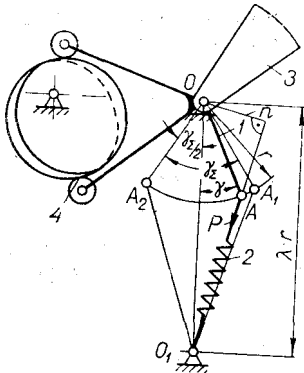


Рис. 1. Схема виконавчого кулачкового механізму з розвантажувальним пристроєм:

1 — важіль; 2 — пружина; 3 — ведена маса; 4 — кулачковий механізм.

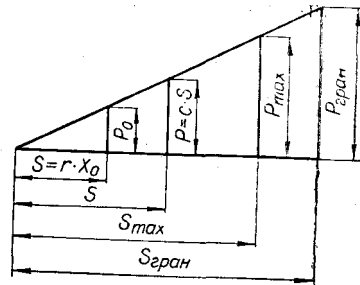


Рис. 2. Силовий трикутник пружини.

Розвантажувальний пристрій, який складається з важеля 1 і пружини 2, встановлюється таким чином, що при усталеному русі в період вибігу пружина здатна акумулювати надлишкову енергію, яка віддається веденою масою 3, з наступною віддачею накопиченої енергії в період розбігу.

У роботі розглядаються синтез закону періодичного руху ВКМ з РП, який визначається диференціальним рівнянням руху системи, і параметричні аналітичні дослідження синтезованого закону.

Диференціальне рівняння руху. Диференціальне рівняння руху ВКМ з РП, який розглядаємо як консервативну систему, згідно з рівнянням Лагранжа другого роду

$$I \cdot \ddot{\gamma} + M_{пр} = 0,$$

де I — момент інерції веденої маси; γ — кутове зміщення; $M_{пр}$ — відновлюючий момент, що створюється зусиллям пружини P ;

$$M_{пр} = P \cdot h,$$

тут h — плече дії зусилля P .

З геометричних співвідношень (рис. 1) та з співвідношень силового трикутника пружини (рис. 2) випливає, що:

$$P = cr \cdot (\chi_0 - \lambda + 1 + \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \gamma});$$

$$h = r \cdot \frac{\lambda \sin \gamma}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \gamma}},$$

де r — радіус важеля; λ — безрозмірний геометричний параметр, який виражає базову віддаль OO_1 в r ; χ_0 — безрозмірний параметр попереднього натягу пружини, який виражає абсолютний попередній натяг пружини S_0 в r ; c — жорсткість пружини.

Після підстановок диференціальне рівняння руху набирає вигляду

$$I \cdot \ddot{\gamma} + cr^2 \cdot \left[\frac{(\chi_0 - \lambda + 1) \lambda \sin \gamma}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \gamma}} + \lambda \sin \gamma \right] = 0. \quad (1)$$

Якісне дослідження диференціального рівняння руху на фазовій площині. Побудова фазової траєкторії для даної системи означає побудову кривої, яка виражає залежність кутової швидкості $\dot{\gamma}$ від кутового зміщення γ . Фазова площина з розташованими на ній фазовими траєкторіями дає можливість відразу побачити всю сукупність рухів, які можуть виникнути в динамічній системі.

Зв'язок між $\dot{\gamma}$ і γ можна визначити з енергетичного балансу системи.

Оскільки консервативні системи характеризуються сталістю енергії, то

$$T + \Pi = \Pi_{\max}, \quad (2)$$

де T , Π , Π_{\max} — відповідно кінетична, потенціальна і максимальна потенціальна енергія системи. При цьому

$$T = \frac{I \cdot (\dot{\gamma})^2}{2}. \quad (3)$$

Для системи, яку ми розглядаємо, Π і Π_{\max} визначаються потенціальною енергією, що накопичує пружина при біжучому γ і при $\gamma_{\Sigma/2}$:

$$\Pi = cr^2 [(\chi_0 - \lambda + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \gamma} + \chi_0(1 - \lambda) - \lambda(1 + \cos \gamma) + \lambda^2 + 1]. \quad (4)$$

$$\Pi_{\max} = cr^2 [(\chi_0 - \lambda + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \gamma_{\Sigma/2}} + \chi_0(1 - \lambda) - \lambda(1 + \cos \gamma_{\Sigma/2}) + \lambda^2 + 1]. \quad (5)$$

Використовуючи співвідношення (3), (4), (5) на основі (2) одержуємо

$$\dot{\gamma} = \pm p_0 \sqrt{(\chi_0 - \lambda + 1) (\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \gamma_{\Sigma/2}} - \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \gamma}) + \lambda (\cos \gamma - \cos \gamma_{\Sigma/2})}, \quad (6)$$

де

$$p_0 = \sqrt{\frac{2cr^2}{I}}.$$

На рис. 3, а показано криві потенціальної енергії при $\lambda=3$, $\chi_0=0$, і $\chi_0=0,5$; на рис. 3, б — відповідні фазові траєкторії.

Криві потенціальної енергії в точках $\gamma=0$, $\gamma=\pm 2\pi$ мають локальні мінімуми, що відповідають за теоремою Лагранжа—Діріхле стійкій рівновазі, а в точках $\gamma=\pm \pi$ — локальні максимуми і нестійку рівно-

вагу. Коли $\frac{I \cdot (\dot{\gamma})^2}{2} < P(\pm\pi)$, то в інтервалі $-\pi < \gamma < \pi$ фазові траєкторії 1—2, 3—4 зображуються замкненими кривими, що свідчить про періодичні коливання системи. Оскільки при $\dot{\gamma} > 0$ γ зростає, а при $\dot{\gamma} < 0$ γ спадає, то зображуюча точка на фазовій траєкторії рухається за годинниковою стрілкою.

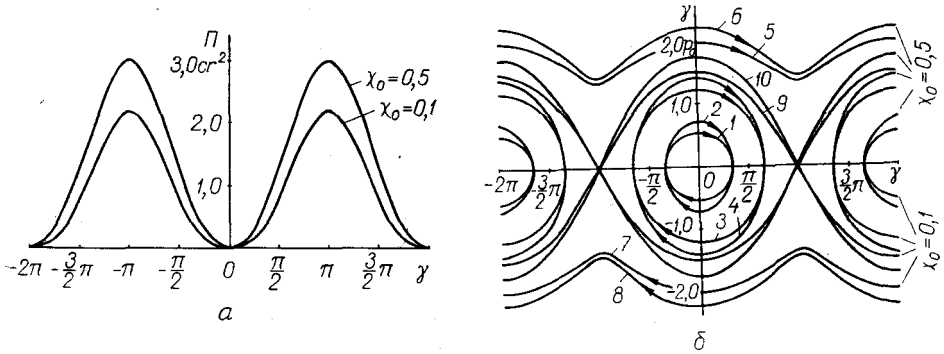


Рис. 3. Якісне дослідження диференціального рівняння руху на фазовій площині:

a — криві потенціальної енергії; *б* — фазові траєкторії.

Коли $\frac{I \cdot (\dot{\gamma}_{\max})^2}{2} > P(\pm\pi)$, що може бути наявним, якщо в початковий момент веденій масі разом з кутовим відхиленням γ надати початкову швидкість $\dot{\gamma}_{\max} > |\rho_0 \sqrt{2(\chi_0 + 1)}|$, то фазові траєкторії 5—6, 7—8 не перетинатимуть вісь $O\gamma$. Це свідчить про те, що ведена маса буде обертатися навколо осі в одному напрямі.

Коли $\frac{I \cdot (\dot{\gamma}_{\max})^2}{2} = P(\pm\pi)$, то фазові траєкторії 9—10 будуть характеризуватися самопересіканням (це так звані сепаратиси).

Як відомо з теорії коливань, рух по сепаратисі неможливо відтворити, бо вона є границею між періодичним коливним і обертовим рухами.

Наближений розв'язок рівняння (1) в інтервалі зі слабо вираженою нелінійністю відновлюючого моменту. Нелінійна частина рівняння (1)

$$f(\gamma) = cr^2 \left[\frac{(\chi_0 - \lambda + 1) \lambda \sin \gamma}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \lambda}} + \lambda \sin \gamma \right]$$

характеризується суттєвою нелінійністю, що видно з рис. 4, де наведено графіки $f(\gamma)$ для різних λ і χ_0 .

Оскільки для кулачкових механізмів максимальний кут розмаху коромисла γ_{Σ} звичайно не перевищує 60° , то це дозволяє виділити на рис. 4 зону $A - 30^\circ \leq \gamma_{\Sigma}/2 \leq 30^\circ$, де нелінійність виражена слабо, і функція $f(\gamma)$ може бути апроксимована двочленом

$$f(\gamma) \approx cr^2 (\alpha\gamma + \beta\gamma^3),$$

в якому коефіцієнти α і β залежатимуть тільки від параметрів λ і χ_0 .

Апроксимація проводилась на ЕЦОМ «Промінь-М» за спеціальною стандартною програмою [1], що дозволяє методом найменших квадратів апроксимувати аналітично задану функцію різними многочленами.

Результати обчислень зведені в таблицю, по якій для заданих λ і χ_0 можна визначити величини α і $\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha}$.

Тепер рівняння (1) можна записати

$$I \cdot \ddot{\gamma} + cr^2(\alpha\gamma + \beta\gamma^3) = 0. \quad (7)$$

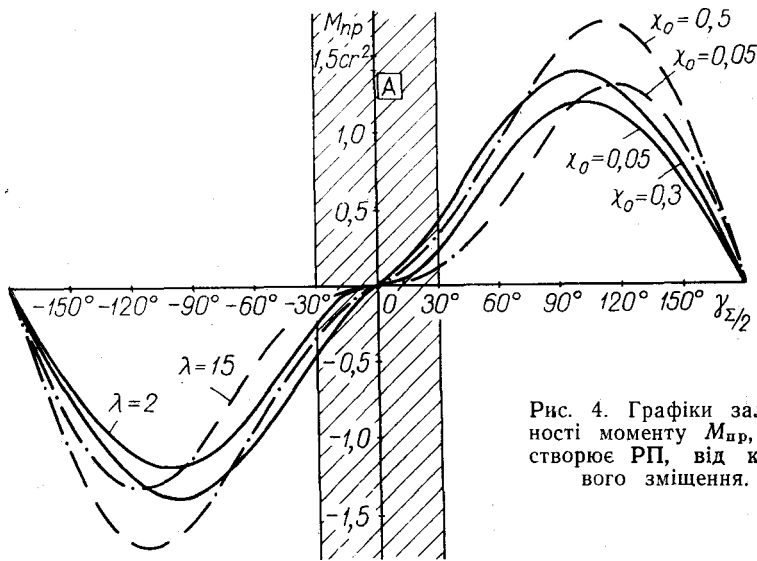


Рис. 4. Графіки залежності моменту $M_{пр}$, що створює РП, від кутового зміщення.

Точні розв'язки рівняння (7) відомі [2]; вони вміщують еліптичні функції і тому незручні для аналізу. Більш зручними є наближені розв'язки рівняння (7), які одержано методом асимптотичних розкладів [3]. При цьому відносна похибка у другому наближенні не перевищує десятих часток процента.

Позначимо ці розв'язки через γ_2 для переміщень і через T_2 для періоду коливань

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_\Sigma}{2} \cos \frac{2\pi}{T_2} \cdot t + \frac{\varepsilon \gamma_\Sigma^3}{256 + 48 \varepsilon \gamma_\Sigma^2} \cos 3 \frac{2\pi}{T_2} t; \quad (8)$$

$$T_2 = T_0 \sqrt{\frac{128 + 24 \varepsilon \gamma_\Sigma^2}{128 + 48 \varepsilon \gamma_\Sigma^2 + \frac{75}{16} \varepsilon^2 \gamma_\Sigma^4}}. \quad (9)$$

T_0 визначає період гармонійних коливань, коли рівняння (7) набирає вигляду

$$I \cdot \ddot{\gamma} + cr^2 \alpha \gamma = 0 \text{ і } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{cr^2 \alpha}}.$$

Визначення інваріантів a_K , b_K , c_K і d_K . Визначаючи інваріанти переміщень $a_K = \frac{\gamma}{\gamma_\Sigma}$, відлік для біжучого γ ведемо від крайнього положення [4]. У попередніх міркуваннях ми приймали за початок відліку положення рівноваги, як це прийнято в теорії коливань.

Очевидно, що для нашої системи

$$a_K = \frac{\gamma_{2\max}/2 - \gamma}{\gamma_{2\max}}. \quad (10)$$

Через наближеність розв'язку (8) в формулу (10) входить максимальний кутовий розмах $\gamma_{2\max}$, який незначно відрізняється від γ_Σ :

$$\gamma_{2\max} = \gamma_\Sigma \frac{128 + 25 \varepsilon \gamma_\Sigma^2}{128 + 24 \varepsilon \gamma_\Sigma^2}.$$

Таблиця для визначення коефіцієнтів α і ε

λ	2,0		3,0		4,0		6,0		8,0		10,0		15,0	
	α	ε	α	ε	α	ε	α	ε	α	ε	α	ε	α	ε
0,05	0,101	14,78	0,075	12,65	0,067	11,47	0,060	10,88	0,057	10,22	0,056	10,18	0,054	10,04
0,1	0,201	6,938	0,150	6,077	0,134	5,475	0,120	5,285	0,114	5,101	0,111	5,174	0,108	4,838
0,2	0,401	3,005	0,300	2,778	0,267	2,553	0,240	2,535	0,229	2,411	0,222	2,461	0,214	2,350
0,3	0,601	1,678	0,450	1,695	0,401	1,559	0,360	1,555	0,343	1,505	0,333	1,551	0,322	1,431
0,4			0,600	1,135	0,534	1,087	0,480	1,086	0,458	1,043	0,444	1,154	0,429	1,114
0,5			0,750	0,808	0,668	0,777	0,600	0,794	0,527	0,789	0,556	0,819	0,537	0,764
0,6					0,801	0,581	0,720	0,626	0,687	0,548	0,667	0,633	0,643	0,631
0,7					0,934	0,482	0,841	0,476	0,800	0,479	0,778	0,512	0,751	0,481
0,8					1,068	0,334	0,961	0,343	0,915	0,421	0,889	0,427	0,858	0,397
0,9							1,081	0,293	1,030	0,312	1,000	0,359	0,965	0,362
1,0							1,201	0,259	1,144	0,256	1,107	0,297	1,073	0,270
1,1							1,321	0,193	1,258	0,218	1,222	0,287	1,179	0,234
1,2							1,441	0,151	1,373	0,153	1,333	0,206	1,287	0,184
1,3									1,487	0,132	1,445	0,162	1,394	0,158
1,4									1,601	0,110	1,558	0,119	1,502	0,122
1,5									1,716	0,075	1,668	0,096	1,609	0,105
1,6									1,830	0,049	1,779	0,079	1,715	0,089
1,7											1,890	0,057	1,823	0,064
1,8											2,001	0,045	1,930	0,054
1,9											2,112	0,025	2,038	0,034
2,0											2,223	0,019	2,114	0,026

Тоді a_k визначається як

$$a_k = 0,5 \left[1 - \frac{(128 + 24 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2) \cos \pi k + \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2 \cos 3 \pi k}{128 + 25 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2} \right], \quad (11)$$

де відносний час $k = \frac{t}{T}$, а $T_2 = 2T$.Інваріанти швидкості b_k одержимо, диференціюючи (11) по k :

$$b_k = \frac{\pi}{2} \left[\frac{128 + 24 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2}{128 + 25 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2} \sin \pi k + \frac{3 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2}{128 + 25 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2} \sin 3 \pi k \right]. \quad (12)$$

Диференціюючи по k (12), одержимо інваріанти прискорень c_k :

$$c_k = \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{128 + 24 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2}{128 + 25 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2} \cos \pi k + \frac{9 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2}{128 + 25 \varepsilon \gamma_{\frac{1}{2}}^2} \cos 3 \pi k \right]. \quad (13)$$

Перемножуючи b_k і c_k , одержуємо інваріанти кінетичної потужності d_k :

$$d_k = \frac{\pi^3}{8} \left[\frac{(128 + 24 \varepsilon \gamma_z^2)(128 + 18 \varepsilon \gamma_z^2)}{(128 + 25 \varepsilon \gamma_z^2)^2} \sin 2\pi k + \frac{12 \varepsilon \gamma_z^2 (128 + 24 \varepsilon \gamma_z^2)}{(128 + 25 \varepsilon \gamma_z^2)^2} \sin 4\pi k + \frac{27 \varepsilon^2 \gamma_z^4}{(128 + 25 \varepsilon \gamma_z^2)^2} \sin 6\pi k \right]. \quad (14)$$

Інваріанти a_k, b_k, c_k вміщують першу і третю гармоніки, а інваріанти d_k — ще й шосту.

Структура a_k, b_k, c_k, d_k криві 1, для $\lambda=3, \chi_0=0,1$ наведені на рис. 5, де криві 2, 4 — перші і треті гармоніки, штрихові криві 3 — відповідні інваріанти за гармонійного закону руху, крива 5 — шоста гармоніка d_k .

Як бачимо, перші гармоніки b_k і c_k незначно відрізняються від відповідних інваріантів за гармонійного закону руху, шоста гармоніка мало впливає на характер d_k .

Дослідження періоду коливальних T_2 констант B, C, D . Як впливає з формули (9), період коливальних T_2 залежить від максимального кутового розмаху γ веденої маси, що є наслідком нелінійності системи. На рис. 6, а графічно представлено цю залежність щодо T_0 .

Константи піка швидкостей B , піка прискорень C , піка кінетичної потужності D визначаються після дослідження залежностей (12), (13), (14) на максимум.

Константа $B = b_{k \max}$ при $k=0,5$:

$$B = B_0 \frac{128 + 21 \varepsilon \gamma_z^2}{128 + 25 \varepsilon \gamma_z^2},$$

де $B_0 = \frac{\pi}{2}$ — константа піка швидкості для гармонійного закону руху.

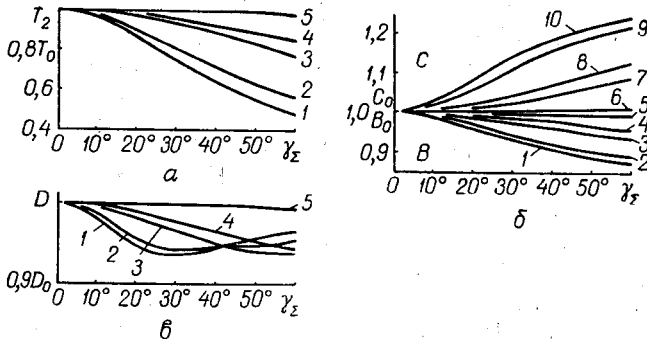


Рис. 6. Графіки залежності періоду коливальних і констант синтезованого закону від максимального кутового розмаху γ_z

а — залежність періоду коливальних T_2 від γ_z ; б — залежності констант піка швидкостей B і піка прискорень C від γ_z ; в — залежність константи піка кінетичної потужності D від γ_z .

1 — $\varepsilon=15,0$; 2 — $\varepsilon=10,0$; 3 — $\varepsilon=3,0$; 4 — $\varepsilon=1,75$; 5 — $\varepsilon=0,3$.

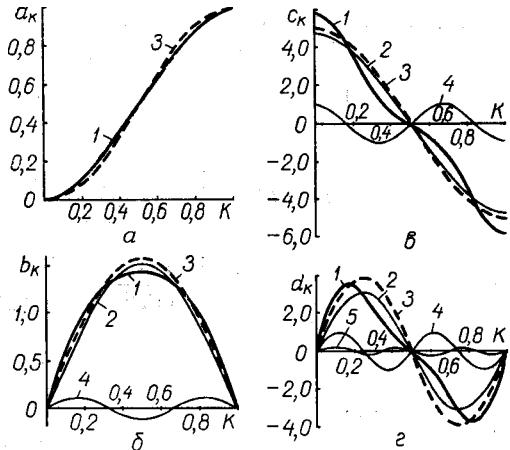


Рис. 5. Структура інваріантів:

а — переміщень a_k ; б — швидкостей b_k ; в — прискорень c_k ; г — кінетичної потужності d_k .

Як видно з рис. 6, б, константа B зі зростанням γ_{Σ} зменшується щодо B_0 .

Константа $C = c_{k \max}$ при $k=0$;

$$C = C_0 \frac{128 + 33 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2}{128 + 25 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2},$$

де $C_0 = \frac{\pi^2}{2}$ — константа піка прискорень для гармонійного закону руху.

З графіків, наведених на рис. 6, б, видно, що константа C збільшується щодо C_0 зі зростанням γ_{Σ} . Під час дослідження (14) на максимум нехтуємо шостою гармонікою і тоді

$$\begin{aligned} D &\approx d_{k \max} \text{ при } k_d = \\ &= \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\sqrt{4096 + 1152 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2 + 1233 \varepsilon^2 \gamma_{\Sigma}^4 - 9 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2 - 64}}{48 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2} \right); \\ D &\approx D_0 \left[\frac{(128 + 24 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2)(128 + 18 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2)}{(128 + 25 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2)^2} \sin 2\pi k_d + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2 (128 + 24 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2)}{(128 + 25 \varepsilon \gamma_{\Sigma}^2)} \sin 4\pi k_d \right], \end{aligned}$$

де $D_0 = \frac{\pi^3}{8}$ — константа піка кінетичної потужності для гармонійного закону руху.

ВИСНОВКИ

1. На базі диференціального рівняння (1) синтезовано закон періодичного руху ВКМ з РП, виведено залежності для інваріантів переміщень a_k , швидкостей b_k , прискорень c_k , кінетичної потужності d_k .

2. Константи піка швидкостей B , піка прискорень C та піка кінетичної потужності D ВКМ з РП залежать від безрозмірних параметрів λ і χ_0 , що створює можливість досягати наперед заданих значень констант B , C і D , вибираючи відповідні λ і χ_0 по таблиці. Особливо слід відзначити можливість мінімізації константи D .

3. ВКМ з РП в ідеальному випадку не допускає зміни швидкісного режиму налагодженням пружини, оскільки інваріанти переміщень (11) залежать від χ_0 (через параметр ε). Проте, як видно з графіків на рис. 6, при значних χ_0 , коли $\varepsilon < 0,3$, період коливань T_2 і константи B , C , D незначно відрізняються від T_0 , B_0 , C_0 , D_0 , закон руху з невеликою похибкою можна вважати гармонійним і користуватися формулами

$$a_k \approx 0,5 (1 - \cos \pi k), \quad T \approx \pi \sqrt{\frac{l}{cr^2 \alpha}}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. Р. Мончибович, Б. А. Попов. Программирование и стандартные программы для ЭЦВМ «Промінь» и «Промінь-М», К., «Наукова думка», 1969.
2. Н. Г. Бондарь. Некоторые автономные задачи нелинейной механики. К., «Наукова думка», 1969.
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
4. К. В. Тир. Механика полиграфических автоматов. М., «Книга», 1965.

YANITSKII V. G.

**THE PARAMETER INVESTIGATIONS OF THE EXECUTIVE CAM MECHANISM
WITH THE UNLOADING UNIT**

Summary

On the basis of differential equation a law of periodic motion of the executive cam mechanism with the unloading unit, which consists of the lever and spring, is synthesized.

The parameter investigation of the velocity constants B , the accelerations C , the kinetic power D , of synthesized law, is carried out.
